

I. Soit n un entier naturel non nul.

Démontrer que les entiers $n!+1$ et $(n+1)!+1$ sont premiers entre eux.

II. Les nombres de Sophie Germain

On s'intéresse au problème suivant :

Pour quels entiers naturels n , le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est-il un nombre premier ?

1°) a) Donner une liste de 10 nombres de la forme $n^4 + n^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

b) Tester s'ils sont premiers. On pourra utiliser un programme ou un logiciel de calcul formel.

2°) Factoriser $n^4 + n^2 + 1$ en produit de deux expressions du second degré (on pourra utiliser un logiciel de calcul formel).

3°) Résoudre les équations $x^2 + x + 1 = 1$ et $x^2 - x + 1 = 1$.

4°) Pour quelles valeurs de n , l'entier $n^4 + n^2 + 1$ est-il un nombre premier ?

Point histoire

Le résultat de cet exercice a été obtenu (sans logiciel de calcul formel !) par Sophie Germain (1776-1831). Chercher qui était Sophie Germain.