

I. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Démontrer que les entiers  $n!+1$  et  $(n+1)!+1$  sont premiers entre eux.

---

## II. Les nombres de Sophie Germain

On s'intéresse au problème suivant :

Pour quels entiers naturels  $n$ , le nombre  $n^4 + n^2 + 1$  est-il un nombre premier ?

1° a) Donner une liste de 10 nombres de la forme  $n^4 + n^2 + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ).

b) Tester s'ils sont premiers. On pourra utiliser un programme ou un logiciel de calcul formel.

2° Factoriser  $n^4 + n^2 + 1$  en produit de deux expressions du second degré (on pourra utiliser un logiciel de calcul formel).

3° Résoudre les équations  $x^2 + x + 1 = 1$  et  $x^2 - x + 1 = 1$ .

4° Pour quelles valeurs de  $n$ , l'entier  $n^4 + n^2 + 1$  est-il un nombre premier ?

### Point histoire

Le résultat de cet exercice a été obtenu (sans logiciel de calcul formel !) par Sophie Germain (1776-1831). Chercher qui était Sophie Germain.