**1ère S1**

# Contrôle du lundi 23 janvier 2012 (3 h)

**Énoncé à conserver. Ne rien écrire, ne rien surligner dessus.**

**Résultat non souligné ou non encadré : – 1**

- **Les exercices I et II doivent être traités sur la copie.**

- **Les exercices III, IV, V doivent être traités sur la feuille de réponses fournie avec le sujet. Aucune justification n'est demandée pour ces trois exercices.**

---

**I. (5 points)** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Vérifier que pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f(x) = 2 - \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

En déduire que la dérivée de $f$ a pour expression $f'(x) = \dfrac{a}{(x+1)^3}$ où $a$ est un réel que l'on précisera.

2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de la dérivée de $f$ et les variations de $f$.

3°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe (O$x$) (donner les valeurs exactes sous forme simplifiée).

On rédigera ainsi :

« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (O$x$) sont solutions de l'équation …….. ».

On conclura ainsi :

« Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (O$x$) ont pour abscisses … ».

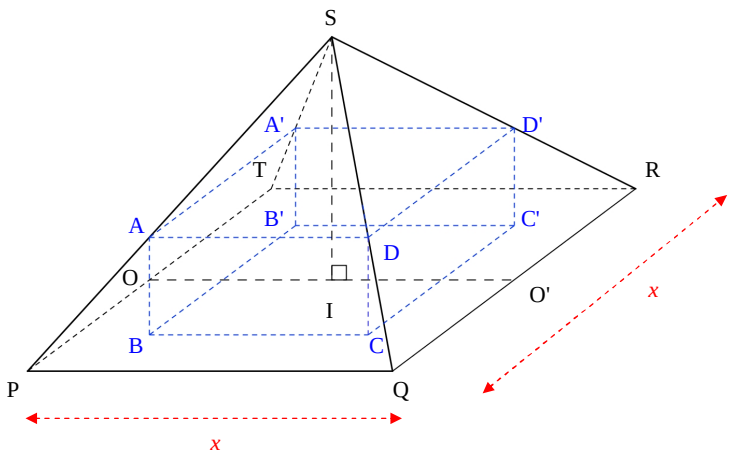
4°) Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

5°) Sur la copie, recopier sur une seule ligne le tableau ci-dessous et le compléter avec des valeurs décimales arrondies au centième (ne rien écrire dans le tableau ci-dessous).

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

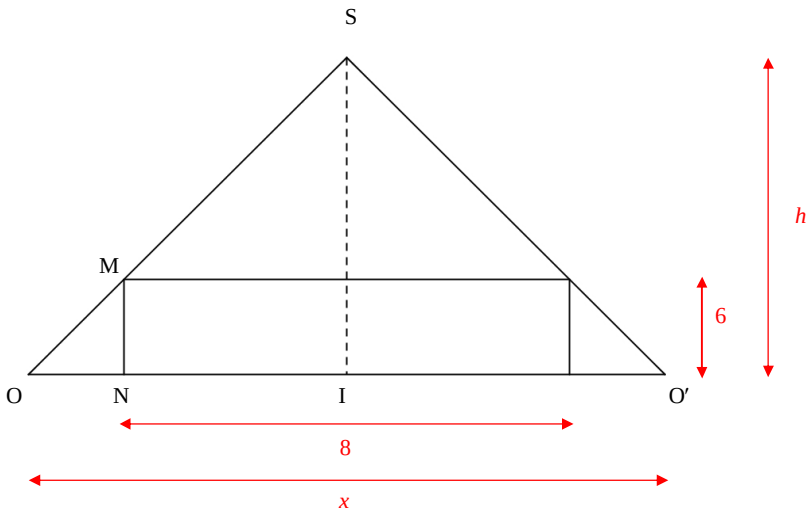
Faire un graphique en prenant 2 cm ou 2 « gros carreaux » pour unité graphique.
Marquer le points par des points et non des croix.
Tracer avec soin la partie de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [0 ; 5] ainsi que la tangente $T$.

**II. (6 points)** Un fabricant veut commercialiser un produit qui a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée (BCC'B'), dans un emballage qui a la forme d'une pyramide régulière à base carrée (PQRT). Les carrés PQRT et BCC'B' ont le même centre I et leurs côtés sont deux à deux parallèles.




Représentation en perspective cavalière

Le but du problème est de trouver les dimensions de la pyramide de sorte que son volume soit minimal.
Le fabricant ne veut pas que la longueur PQ du côté de la base de la pyramide soit supérieure à 20 cm. Les dimensions du parallélépipède sont 8 cm pour le côté [BC] de la base carrée et 6 cm pour la hauteur [BA].On désigne par $x$ la longueur (en centimètres) du côté [PQ] de la base de la pyramide et par $h$ la longueur en centimètres de sa hauteur [IS], où S est le sommet de la pyramide.




On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule : $\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{B} \times h}{3}$ où $\mathbf{B}$ désigne l'aire de la base et $h$ la hauteur.

**Partie A**

1°) À quel intervalle le nombre $x$ appartient-il ? Donner la réponse sans justifier.

2°) Exprimer $h$ en fonction de $x$.

3°) En déduire une expression du volume $\mathrm{V}(x)$ en $\mathrm{cm}^3$ de la pyramide.

**Partie B**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x-8}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{8\}$.

1°) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$ on a $f'(x) = \dfrac{2x^2(x-12)}{(x-8)^2}$ (indiquer les principales étapes de calcul sur la copie).

2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de la dérivée de $f$ (en détaillant bien) et les variations de $f$ sur $\mathbb{R} \setminus \{8\}$. Compléter le tableau avec la (ou les) valeur(s) du (des) extremum(s) éventuels (calculs au brouillon).

**Partie C**

1°) Démontrer que, pour $x \in ]8 ; 20]$, on a : $\mathrm{V}(x) = 2f(x)$.

2°) En déduire la valeur de $x$ pour laquelle le volume de la pyramide est minimum.

3°) Quel est alors ce volume ? Quelle est la hauteur de la pyramide ? Quel est le volume à remplir entre le produit et l'emballage ?

---

**III. (4 points)**

**Dans cet exercice :**

**- les questions sont indépendantes les unes des autres ;**

**- aucune justification n'est demandée sur la copie ;**

**On se contentera de porter les réponses (une seule réponse à chaque fois) dans le tableau fourni sur la feuille de réponses.**

1°) On considère deux urnes contenant des boules blanches et noires.
Dans la première il y a 40 boules noires et 60 boules blanches.
Dans la deuxième il y a 38 boules noires et 12 boules blanches.

On choisit une boule au hasard dans la première urne puis une boule au hasard dans la deuxième urne.

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes (résultat sous forme décimale).

2°) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilité $(\Omega, P)$ prenant les valeurs – 2, 0 et 1, et dont l'espérance est nulle.

On sait de plus que $P(\mathrm{X}=1) = \dfrac{1}{3}$.

Calculer la variance de X.

3°) Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible.
Calculer la probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre (résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

4°) Une boîte contient huit jetons. Deux jetons portent le numéro 1, deux jetons portent le numéro 2, deux jetons portent le numéro 3, deux jetons portent le numéro 4.
On tire successivement au hasard sans remise 3 jetons et l'on note les numéros des jetons tirés dans l'ordre.
Calculer la probabilité que les trois numéros soient deux à deux distincts c'est-à-dire tous différents (résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

---

**IV. (3 points)** Une urne contient trois boules rouges et deux boules noires.
Un joueur tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.
Soit $x$ un entier naturel non nul.
Lors de chacun des deux tirages, le joueur gagne $x$ euros s'il obtient une boule rouge et perd trois euros s'il obtient une boule noire (pour chaque boule rouge, on gagne $x$ euros ; on perd trois euros pour chaque boule noire).
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux tirages.

1°) Déterminer la loi de probabilité de G.

2°) Exprimer l'espérance de G en fonction de $x$ (donner l'expression sous forme réduite).

3°) Existe-t-il une valeur de $x$ telle que le jeu soit équitable ? Si oui, donner cette valeur.

---

**V. (2 points)** Le plan orienté $P$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique ainsi que A, B, A', B' les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).
Soit I l'image de $-\dfrac{3\pi}{4}$ sur le cercle $\mathcal{C}$.

1°) Quelle est la mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OI}})$ appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ ?

2°) Soit $x$ un nombre réel et M le point image associé à $x$ sur le cercle $\mathcal{C}$.

Compléter les phrases :

- « Lorsque $x$ décrit* l'intervalle $[\dfrac{5\pi}{4} ; 2\pi]$, alors le point M décrit l'arc $\overset{\frown}{.....}$ »
- « Lorsque $x$ décrit l'intervalle $[-\pi ; -\dfrac{3\pi}{4}]$, alors le point M décrit l'arc $\overset{\frown}{.....}$ »

* « $x$ décrit l'intervalle $[\dfrac{5\pi}{4} ; 2\pi]$ » signifie « $x$ prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $[\dfrac{5\pi}{4} ; 2\pi]$ ».

# Bonus à faire à la fin (1 point)

# À traiter sur la copie, si le tout le reste a été traité

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \frac{10^n}{n!}$, où $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ *.

Le calcul direct de $u_n$ à partir de cette formule se fait sans problème pour de « petites » valeurs de $n$ « à la main » ou à la calculatrice.

En revanche, pour de « grandes » valeurs de $n$, une calculatrice « normale » ne peut effectuer directement ce calcul pour cause de dépassement de capacité.

1°) Le but de cette question est de déterminer une valeur approchée de $u_{100}$.

a) En écrivant $u_{100} = \frac{10}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{3} \times \ldots \times \frac{10}{100}$, rédiger <u>en langage naturel</u> (et non dans le langage de la calculatrice) un algorithme comportant une boucle « Pour » permettant de calculer $u_{100}$.

- Écrire cet algorithme dans un cadre sur une seule page.
- Indiquer clairement les différentes étapes de l'algorithme.
- Respecter les indentations éventuelles.

b) Programmer cet algorithme sur calculatrice.
Indiquer la valeur affichée en sortie après exécution du programme (mettre exactement ce qui est affiché).

2°) Modifier l'algorithme du 1°) afin d'obtenir un algorithme permettant de saisir une valeur de $n$ et d'afficher en sortie la valeur de $u_n$ correspondante.
Réécrire complètement le nouvel algorithme.

Exécuter le programme correspondant sur calculatrice et observer le comportement des valeurs de $u_n$ lorsque $n$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Faire une phrase du type :

« Lorsque $n$ prend des valeurs de plus en plus grandes, on observe les valeurs de $u_n$ sont de plus en plus … ».

* Cette écriture, lue « factorielle de $n$ », désigne le produit de tous les entiers naturels de 1 à $n$.
Par exemple, $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
Une commande spéciale de la calculatrice permet d'effectuer le calcul de la factorielle d'un entier.

# Feuille de réponses du contrôle du lundi 23 janvier 2012

**Prénom et nom :** …….

**Note : ….. / 20**

| I (5) | II (6) | III (4) | IV (3) | V (2) | Bonus |
|---|---|---|---|---|---|
| …… | …… | …… | …… | …… | …… |

---

**III. Écrire un seul résultat à chaque fois.**

| | |
|---|---|
| **1°)** | La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à ……. |
| **2°)** | La variance de X est égale à ……. |
| **3°)** | La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à ……. |
| **4°)** | La probabilité que les trois numéros soient deux à deux distincts est égale à ……. |

**IV. Écrire un seul résultat, une seule réponse à chaque fois.**

1°) **Loi de probabilité de G (écrire les probabilités sous forme décimale).**

| $g_i$ | | |
|---|---|---|
| $P$ (G = $g_i$ ) | | Total = 1 |

2°) **Espérance de G :**

E(G) = ……

3°) **Existence et détermination d'une valeur de *x* telle que le jeu soit équitable :**

……..

---

**V. Écrire une seule réponse à chaque fois.**

1°) La mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right)$ appartenant à l'intervalle [0 ; 2π] est égale à …….. .

2°)

• Lorsque *x* décrit l'intervalle $[\frac{5\pi}{4} ; 2\pi]$, alors le point M décrit l'arc ……. .

• Lorsque *x* décrit l'intervalle $[-\pi ; -\frac{3\pi}{4}]$, alors le point M décrit l'arc ……. .

---

**Quelques recommandations à respecter pour les exercices I et II :**

• Tirer les traits de fraction à la règle.

• Faire les tableaux de variations ainsi que les flèches de variation la règle. Ne pas oublier les valeurs d'annulation éventuelles de la dérivée.

• Justifier chaque fois la dérivabilité par une phrase du type « *f* est dérivable sur …. comme fonction … »

• Quantifier les égalités : « $\forall x \in \ldots \quad f'(x) = \ldots$ ».

# Corrigé du contrôle du 23 janvier 2012

## I. Étude d'une fonction

$f : x \mapsto \dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1°) Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f(x) = 2 - \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

**1ère méthode :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f(x) = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = \frac{2(x^2+2x+1)-3}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2-3}{(x+1)^2} = 2 - \frac{3}{(x+1)^2}$$

**2e méthode :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad 2 - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2-3}{(x+1)^2} = \frac{2(x^2+2x+1)-3}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = f(x)$$

Déduisons-en que $f'(x) = \dfrac{a}{(x+1)^3}$ où $a$ est un réel à préciser.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fonction rationnelle.

Pour dériver le plus simple (le plus économique en calcul) est d'utiliser la forme $f(x) = 2 - \dfrac{3}{(x+1)^2}$ que l'on réécrit $f(x) = 2 - 3 \times \dfrac{1}{(x+1)^2}$ de manière à utiliser la formule du cours : $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = 0 - 3 \times \left[-\frac{2 \times 1}{(x+1)^3}\right] = \frac{6}{(x+1)^3}$$

2°) Tableau comprenant l'étude du signe de la dérivée de $f$ et les variations de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $(x+1)^3$ | | $-$ | $0^{\text{dén}}$ | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| Variations de $f$ | | ↘ | ‖ | ↗ | |

La dérivée ne s'annule en aucun réel.

On vérifie que les variations de la fonction $f$ sont en accord avec la courbe de la fonction $f$ obtenue sur l'écran de la calculatrice graphique.

3°) Déterminons les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe (O$x$).

Pour déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe (O$x$), il est plus simple d'utiliser la forme $f(x) = 2 - \dfrac{3}{(x+1)^2}$.
Il est cependant tout à fait possible d'utiliser la forme de base.
Il faut alors considérer un polynôme du second degré, puis de calculer son discriminant… alors qu'avec la deuxième forme on évite tous ces calculs.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (O$x$) sont solutions de l'équation $f(x) = 0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$2-\frac{3}{(x+1)^2}=0$$

$$(x+1)^2=\frac{3}{2}$$

$$x+1=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou } x+1=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x=-1+\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou } x=-1-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (O$x$) ont pour abscisses $-1+\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $-1-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

**Remarque :** on peut aussi transformer les abscisses des deux points d'intersection en les donnant sous la forme

$$-1+\sqrt{\frac{3}{2}}=-1+\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad -1-\sqrt{\frac{3}{2}}=-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

4°) Déterminons une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

Une équation de $T$ s'écrit : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

On calcule à part :

$$f(1)=\frac{5}{4}$$

$$f'(1)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Donc $T$ a pour équation : $y=\frac{3}{4}(x-1)+\frac{5}{4}$ soit $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

On peut vérifier ce résultat avec la calculatrice.

Pour la rédaction, on ne peut se contenter d'écrire $T$ : $y=\ldots$ .

On doit écrire « $T$ a pour équation $y=\ldots$ ».

5°) Tableau de valeurs, arrondies au centième (on obtient ce tableau grâce à la calculatrice) :

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | – 1 | 0,67 | 1,25 | 1,52 | 1,67 | 1,76 | 1,81 | 1,85 | 1,88 | 1,90 | 1,92 |

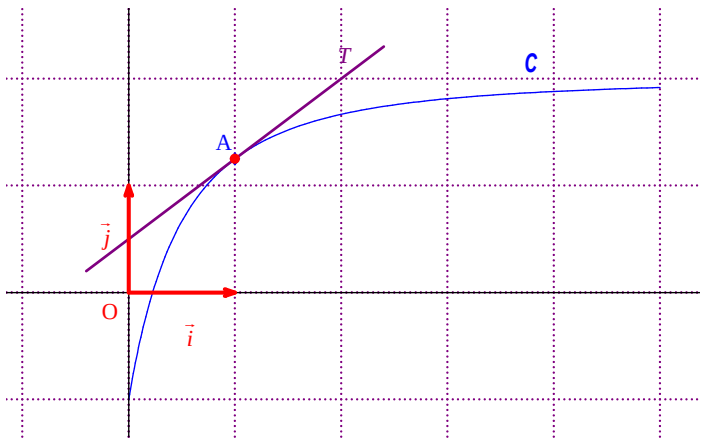
Je donne ci-dessous le tableau de valeurs exactes qui n'était pas demandé dans l'énoncé mais qui n'est pas inintéressant.

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | – 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{13}{25}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{86}{49}$ | $\frac{33}{16}$ | $\frac{150}{81}$ | $\frac{47}{25}$ | $\frac{230}{121}$ | $\frac{69}{36}=\frac{23}{12}$ |

On place les différents points correspondants au tableau de valeurs (sous la forme de points, et non de croix).

Pour le tracé de $T$ : on sait d'après l'équation réduite que $T$ a pour ordonné à l'origine $\frac{1}{2}$.

Le point A étant placé sur la courbe, on joint A au point B(0 ; $\frac{1}{2}$).




Le nom de la courbe doit figurer sur le graphique.

On peut indiquer l'équation de la courbe $\mathcal{C}$ : $y=2-\frac{3}{(x+1)^2}$.

Doivent figurer sur le graphique :

- le nom de la courbe
- le nom de la tangente
- le nom du point A

J'aurais pu rajouter la question supplémentaire suivante :

« Déterminer graphiquement une valeur approchée de la solution $x_0$ de l' équation $f(x)=3$ dans l'intervalle [0 ; 5]. »

---

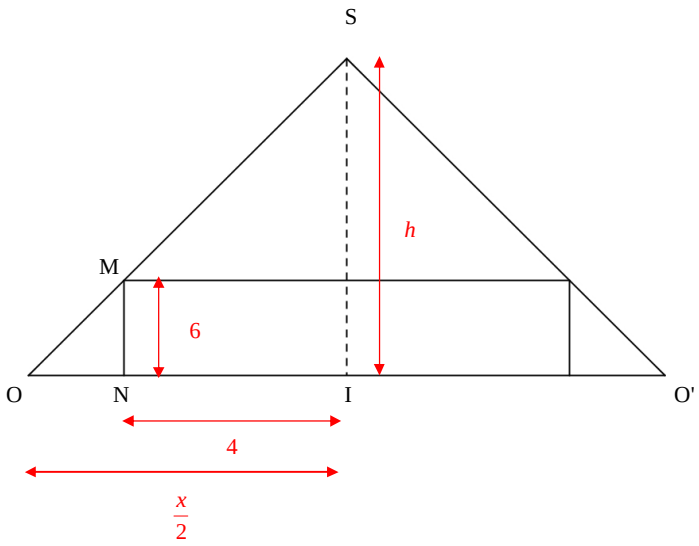
## II. Problème d'optimisation dans l'espace

### Partie A

1°) $x \in ]8\ ;\ 20]$

2°) Exprimons $h$ en fonction de $x$.

On va utiliser la deuxième figure (qui représentait une coupe, ce que l'énoncé ne disait pas).
Je souligne d'ailleurs que cette figure pouvait soulever des questions.
On pouvait en effet se poser légitimement la question de savoir où figuraient les points M et N sur la figure en perspective.




On travaille dans le triangle SOI.

(MN) // (SI)

Donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{\frac{x}{2}-4}{\frac{x}{2}}=\dfrac{6}{h}$.

D'où $\dfrac{x-8}{x}=\dfrac{6}{h}$ donc $h=\dfrac{6x}{x-8}$.

Vu les soucis que cette question a posé à beaucoup d'élèves avec une grande tendance à utiliser le théorème de Pythagore (conduisant à des calculs assez épouvantables, je dois dire), je pense que cette question ne sera pas prête d'être oubliée !

### Autre façon (un peu plus compliquée) :

$$\frac{h-6}{h}=\frac{4}{\frac{x}{2}}$$

$$h-6=\frac{8}{x}\times h$$

$$x(h-6)=8h$$

$$xh-6x=8h$$

$$h(x-8)=6x$$

$$h=\frac{6x}{x-8}$$

3°) Déduisons-en une expression du volume V($x$) de la pyramide.

D'après la formule donnant le volume d'une pyramide, on a :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{3}\times x^2\times h \\ &= \frac{1}{3}\times x^2\times\frac{6x}{x-8} \\ &= x^2\times\frac{2x}{x-8} \\ &= \frac{2x^3}{x-8} \end{aligned}$$

**Partie B**

$f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x-8}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{8\}$

1°) Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{8\}$ on a $f'(x) = \dfrac{2x^2(x-12)}{(x-8)^2}$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{8\}$ comme fonction rationnelle.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{8\} \quad f'(x) &= \frac{3x^2(x-8)-x^3}{(x-8)^2} \\ &= \frac{x^2\left[3(x-8)-x\right]}{(x-8)^2} \\ &= \frac{x^2(2x-24)}{(x-8)^2} \\ &= \frac{2x^2(x-12)}{(x-8)^2} \end{aligned}$$

2°) Tableau comprenant l'étude du signe de la dérivée de $f$ et les variations de $f$ :

Il est absolument essentiel de détailler l'étude du signe de chaque facteur dans le tableau d'étude.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 8 | | 12 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $2x^2$ | | + | $0^{num}$ | + | | + | | + | |
| Signe de $x-12$ | | – | | – | | – | $0^{num}$ | + | |
| Signe de $(x-8)^2$ | | + | | + | $0^{dén}$ | + | | + | |
| Signe de $f'(x)$ | | – | $0^{num}$ | – | ‖ | – | $0^{num}$ | + | |
| Variations de $f$ | | ↘ | 0 | ↘ | ‖ | ↘ | 432 | ↗ | |

$f(12) = 432$

J'aurais dû poser la question : « Préciser en quelles valeurs la dérivée de $f'$ s'annule ».

$f'$ s'annule en 0 (souvent oublié par les élèves dans le tableau de variation) et en 12.

On vérifie que les variations obtenues sont en accord avec la courbe de la fonction $f$ obtenue sur l'écran de la calculatrice (mais il faut bien choisir la fenêtre graphique pour l'axe des ordonnées).

**Partie C**

1°) Démontrons que $\forall x \in ]8\,;20]$, $V(x) = 2f(x)$.

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{2x^3}{x-8} \\ &= 2\times\frac{x^3}{x-8} \\ &= 2f(x) \end{aligned}$$

2°) Déduisons-en la valeur de $x$ pour laquelle le volume de la pyramide est minimum.

La fonction V et $f$ ont le même sens de variation sur l'intervalle ]8 ; 20]  (car 2 > 0).

Le tableau de variation de V est donc le suivant :

| $x$ | 8 | | 12 | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de V | ‖ | ↘ | 864 | ↗ | $V(20)$ |

Le minimum de V sur l'intervalle ]8 ; 20] est obtenu pour $x = 12$.

Il est à noter que l'on doit parler du minimum de V et non du minimum de V($x$) sur l'intervalle]8 ; 20].

« Le minimum de V~~($x$)~~ sur l'intervalle]8 ; 20] est …. »

$$\begin{aligned} V(12) &= 2 \times f(2) \\ &= 2 \times 432 \\ &= 864 \end{aligned}$$

On peut aussi calculer $V(20) = \frac{4000}{3} = 1333,333333...$ mais cette valeur ne sert à rien.

3°) Le volume minimal est égal à 864 cm$^3$.

Calculons la hauteur de la pyramide.

Il y avait deux méthodes pour traiter cette question.
Tous les élèves pouvaient arriver à traiter cette question même ceux qui n'avaient pas réussi à faire la question 2°) de la partie A, comme on le voit dans la deuxième méthode.
C'est pourquoi cette question a été comptée dans le barème.

1ère méthode :

On applique la formule trouvée dans la question 2°) de la partie A.

$$h = \frac{6 \times 12}{12 - 8}$$

$$h = \frac{6 \times 12}{4}$$

$$h = 18$$

2e méthode :

D'après la formule donnant le volume d'une pyramide :

$$864 = \frac{1}{3} \times 144 \times h$$

Donc $864 = 48 \times h$

Donc $h = \frac{864}{48}$

soit $h = 18$

La hauteur de la pyramide est de 18 cm.

Calculons le volume à remplir entre le produit et l'emballage.

Le volume à remplir s'obtient en faisant la différence entre le volume de la pyramide et le volume du parallélépipède rectangle :

$864 - 8 \times 8 \times 6 = 480$

Le volume à remplir est égal à 480 cm$^3$.

*Question supplémentaire intéressante :*

Déterminer le(s) réel(s) $x$ tels que le volume de la pyramide soit égal à 1000 cm$^3$.

On résout l'équation $\frac{2x^3}{x-3} = 1000$.
On utilise la calculatrice graphique.
On représente la fonction $x \mapsto \frac{2x^3}{x-8}$ (attention à la syntaxe quand on rentre la fonction sur calculatrice : $(2X \wedge 3)/(X-8)$).

On doit une bonne fenêtre graphique.

On trouve trois solutions correspondant aux affichages :

15,615528 (retenue car dans l'intervalle $]8 ; 20]$)

10 (retenue car dans l'intervalle $]8 ; 20]$)

– 25,61553 (exclue car hors de l'intervalle $]8 ; 20]$)

**III.**

1°)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Urne 1 | 40 boules noires<br>60 boules blanches | Urne 2 | 38 boules noires<br>12 boules blanches |

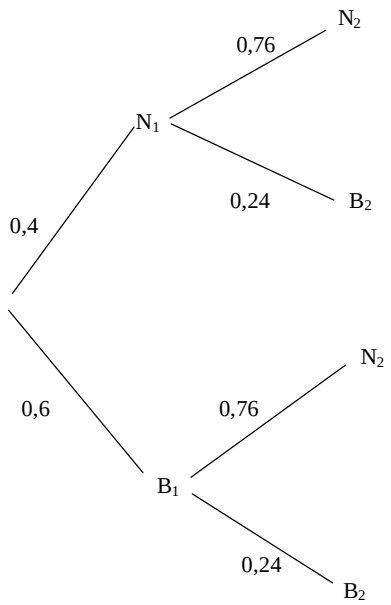
Les deux tirages constituent deux expériences indépendantes.
On dresse un arbre pondéré.

$N_1$ : « obtenir une boule noire au premier tirage »

$B_1$ : « obtenir une boule blanche au premier tirage »

$N_2$ : « obtenir une boule noire au deuxième tirage »

$B_2$ : « obtenir une boule blanche au deuxième tirage »




Calculons la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

On note E l'événement « obtenir deux boules de couleurs différentes ».

On considère les chemins $N_1$ - $B_2$ et $B_1$ - $N_2$.

$P$ (E) = 0,4 × 0,24 + 0,6 × 0,76
= 0,552

2°)

X : variable aléatoire définie sur un espace probabilité (Ω, $P$) prenant les valeurs – 2, 0 et 1, et dont l'espérance est nulle.

On sait de plus que $P$ (X = 1) = $\frac{1}{3}$.

On sait que l'espérance de X est nulle donc – 2 × $P$ (X = – 2) + 0 × $P$ (X = 0) + 1 × $P$ (X = 1) = 0 soit
– 2 × $P$ (X = – 2) + 1 × $\frac{1}{3}$ = 0 d'où $P(X=-2)=\frac{1}{6}$.

On sait d'autre part que : $P$ (X = – 2) + $P$ (X = 0) + $P$ (X = 1) = 1 d'où $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Calculons la variance de X.
D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a :
$V(\mathrm{X})=\left((-2)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{3}\right)-0^2=\frac{4}{6}+\frac{1}{3}=1$

3°) On calcule les aires des différentes zones de la cible.

On nomme O le centre de la cible et $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ les zones de la cible en partant de la zone la plus proche du centre.

On peut faire un schéma pour mieux visualiser la cible.

L'aire de la zone $Z_1$ (disque de centre O et de rayon 10 cm) est égale à : $\pi \times 10^2 = 100\,\pi$.

L'aire de la zone $Z_2$ (couronne circulaire comprise entre les cercles de centre O et de rayons respectifs 10 cm et 20 cm) est égale à : $\pi \times 20^2 - \pi \times 10^2 = 400\,\pi - 100\,\pi = 300\,\pi$.

L'aire de la zone $Z_3$ (couronne circulaire compris entre les cercles de centre O et de rayons respectifs 20 cm et 30 cm) est égale à : $\pi \times 30^2 - \pi \times 20^2 = 900\,\pi - 400\,\pi = 500\,\pi$.

| **Zone** | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| **Aire** | $100\ \pi$ | $300\ \pi$ | $500\ \pi$ | Aire totale = $900\ \pi$ |

La probabilité d'atteindre la zone $Z_3$ est égale à $\frac{500\times\pi}{900\times\pi}=\frac{5}{9}$.

4°)

**boîte**
- deux jetons portent le numéro 1
- deux jetons portent le numéro 2
- deux jetons portent le numéro 3
- deux jetons portent le numéro 4

On tire successivement au hasard sans remise 3 jetons et l'on note les numéros des jetons tirés dans l'ordre.

Calculons la probabilité que les trois numéros soient deux à deux distincts c'est-à-dire tous différents (résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

● Nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire :

| 1er tirage | 2e tirage | 3e tirage |
|---|---|---|
| **8** | **7** | **6** |

Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à : $8 \times 7 \times 6$.

● Nombre de résultats possibles pour l'événement considéré :

| 1er tirage | 2e tirage | 3e tirage |
|---|---|---|
| **8** | **6** | **4** |

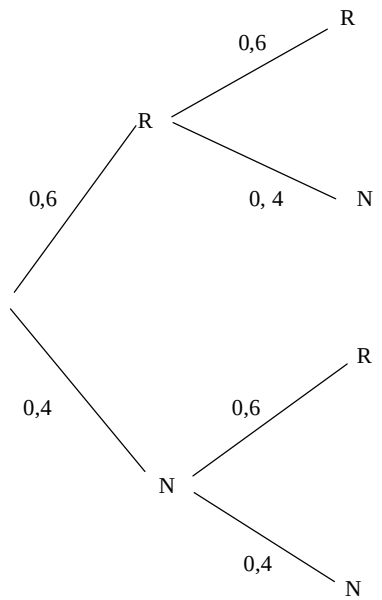
Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à : $8 \times 6 \times 4$.

La probabilité que les trois numéros soient deux à deux distincts est donc égale à : $\frac{8\times6\times4}{8\times7\times6}=\frac{4}{7}$

**IV.**

1°) **Déterminons la loi de probabilité de G.**

On dresse un arbre pondéré.




Il y a trois configurations possibles :

- tirer deux boules rouges (gain : $x + x = 2x$)
- tirer deux boules noires (gain : $-3-3=-6$)
- tirer une boule rouge et une boule noire (gain : $x-3$)

G peut donc prendre les valeurs : $g_1 = 2x$, $g_2 = x-3$, $g_3 = -6$.

En appliquant le principe multiplicatif, on peut calculer les probabilités des différentes gains (événements élémentaires associés à la variable G).

$P(G = g_1) = P(R - R) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$

$P(G = g_2) = P(R - N) + P(N - R) = 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$

$P(G = g_3) = P(N - N) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$

La loi de probabilité de G est donnée dans le tableau :

| $g_i$ | $2x$ | $x-3$ | $-6$ | |
|---|---|---|---|---|
| $P$ (G = $g_i$) | 0,36 | 0,48 | 0,16 | Total = 1 |

2°) **Exprimons l'espérance de G en fonction de *x*.**

$E(G) = 2x \times 0{,}36 + (x-3) \times 0{,}48 - 6 \times 0{,}16$
$= 1{,}2\,x - 2{,}4$

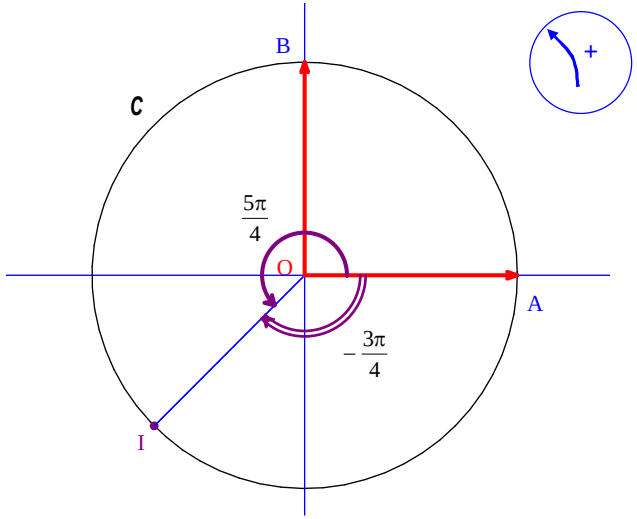
3°) **Déterminons s'il existe une valeur de *x* telle que le jeu soit équitable.**

Le jeu est équitable si et seulement si $E(G) = 0$
si et seulement si $1{,}2\,x - 2{,}4 = 0$
si et seulement si $x = \dfrac{2{,}4}{1{,}2}$
si et seulement si $x = 2$

Le jeu est équitable lorsque $x = 2$.

Dans un devoir écrit, on ne répond pas par oui ou non à une question.

**V.** I : image de $-\dfrac{3\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique




1°) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}$

En ajoutant $2\pi$, on obtient encore une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right)$.

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right) = 2\pi - \dfrac{3\pi}{4}$

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right) = \dfrac{5\pi}{4}$

$\dfrac{5\pi}{4} \in [0\,;\,2\pi]$

**Conclusion :**

La mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right)$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ est égale à $\dfrac{5\pi}{4}$.

2°)

- Lorsque *x* décrit l'intervalle $[\dfrac{5\pi}{4}\,;\,2\pi]$, alors le point M décrit l'arc $\overset{\frown}{IA}$.
- Lorsque *x* décrit l'intervalle $[-\pi\,;\,-\dfrac{3\pi}{4}]$, alors le point M décrit l'arc $\overset{\frown}{A'I}$.

# Bonus

« Création » (il vaudrait mieux dire « rédaction ») d'un algorithme et programmation

Il s'agit d'un algorithme de calcul de produit avec une boucle « Pour ».

$u_n = \frac{10^n}{n!}$

1°) Calcul d'une valeur approchée de $u_{100}$.

a) $u_{100} = \frac{10}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{3} \times \ldots \times \frac{10}{100}$

**Initialisation :**

U prend la valeur 1

**Traitement :**

**Pour** *i* allant de 1 à 100 (avec un pas de 1) Faire

U prend la valeur U $\times \frac{10}{i}$

**FinPour**

**Sortie :**

Afficher U

b) La valeur affichée en sortie est : $1{,}07151029 \times 10^{-58}$.

2°)

**Entrée :**

Saisir *n*

**Initialisation :**

U prend la valeur 1

**Traitement :**

**Pour** *i* allant de 1 à *n* (avec un pas de 1) **Faire**

U prend la valeur U $\times \frac{10}{i}$

**FinPour**

**Sortie :**

Afficher U

« Lorsque *n* prend des valeurs de plus en plus grandes, on observe les valeurs de $u_n$ sont de plus en plus proche de 0 ».

# Consignes générales

Rédiger à l’encre

Apporter une montre

On peut admettre le résultat d’une question et l’utiliser dans les questions suivantes.