1ère S — Exercices sur les suites géométriques (1)

Rappel sur la calculatrice :

Pour le calcul des puissances sur calculatrice, on utilise la touche $\boxed{\wedge}$.

1 Les nombres 5 ; 6 ; 7,2 ; 8,64 ; 10,368 forment-ils dans cet ordre une suite géométrique ?
Si oui, préciser la raison.

2 Recopier et compléter les phrases :

1°) « Les nombres 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 forment dans cet ordre une suite géométrique de raison …….. ».
2°) « Les nombres 1 ; – 1 ; 1 ; – 1 ; 1 forment dans cet ordre une suite géométrique de raison …….. ».

3 1°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 3$. Calculer u_{10}.

2°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = -5$. Calculer u_5.

4 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$.

1°) Écrire u_{n+1} en fonction de u_n (il n'y a pas de calcul à faire).

2°) Écrire u_n en fonction de *n*.

5 On place un capital de 3 000 € à intérêts composés au taux annuel de 5 % par an.
On note C_n la valeur acquise par le capital au bout de *n* années (en €).
1°) Quel est le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % ?
Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
Recopier et compléter la phrase :
« (C_n) est une suite ……………… de premier terme $C_0 =$ .... et de raison $q =$ …... »
2°) Exprimer C_n en fonction de *n*.
3°) Calculer C_5.

6 La population d'un pays augmente de 3 % par an. En 1998, ce pays compte 2 000 habitants.
On note P_n la population au bout de *n* années.
1°) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
Recopier et compléter la phrase :
« (P_n) est une suite ……………… de premier terme $P_0 =$ .... et de raison $q =$ …... . »
2°) Exprimer P_n en fonction de *n*.
3°) Calculer P_{10}.

7 Le prix d'un matériel baisse de 15 % chaque année. Son prix à l'état neuf était 1 800 €.
On note P_n le prix au bout de *n* années (en €).
1°) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
Recopier et compléter la phrase :
« (P_n) est une suite ……………… de premier terme $P_0 =$ .... et de raison $q =$ …... . »
2°) Exprimer P_n en fonction de *n*.
3°) Déterminer par essais successifs sur la calculatrice au bout de combien d'années la cote de ce matériel sera inférieure à 450 €.

8 Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_3 = 12{,}8$ et $u_4 = 20{,}48$.
Calculer la raison *q* et u_0.

9 1°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $q = \sqrt{2}$. Calculer u_{10}.

2°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 0{,}1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_6.

10 Représenter sur un axe Δ de repère $(O, \vec{i})$ les premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 2$.

Corrigé

$\boxed{1}$ Les nombres 5 ; 6 ; 7,2 ; 8,64 ; 10,368 forment dans cet ordre une suite géométrique de raison 1,2.

Solution détaillée :

Déterminons si les nombres 5 ; 6 ; 7,2 ; 8,64 ; 10,368 forment dans cet ordre une suite géométrique.

On calcule les quotients successifs.

On garde l'ordre. On calcule le quotient de chaque nombre sur le précédent.

$$\frac{6}{5}=1,2$$
$$\frac{7,2}{6}=1,2$$
$$\frac{8,64}{7,2}=1,2$$
$$\frac{10,368}{8,64}=1,2$$

Les quotients sont tous égaux à 1,2 donc les nombres 5 ; 6 ; 7,2 ; 8,64 ; 10,368 forment dans cet ordre une suite géométrique de raison 1,2.

On peut aussi dire qu'ils forment une *progression géométrique* (terme ancien intéressant à connaître) de raison 1,2.

Mise en garde :

• Ne pas désigner les nombres 5 ; 6 ; 7,2 ; 8,64 ; 10,368 par u_0, u_1, u_2 …. car l'énoncé ne parle pas de suite et ce n'est pas la peine d'en introduire une.

• Bien écrire les quotients dans le bon ordre : 2^e^ nombre sur le premier, 3^e^ nombre sur le 2^e^ etc…

• Les quotients tombent justes ; on a donc pu utiliser les valeurs décimales car ce sont des valeurs exactes.

Étude d'une solution erronée :

$$\frac{u_0}{u_1}=\frac{5}{6}=0,83$$

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{6}{7,2}=0,83$$

$$\frac{u_2}{u_3}=\frac{7,2}{8,64}=0,83$$

Les nombres 5 ; 6 ; 7,2 ; 8,64 ; 10,368 forment dans cet ordre une suite géométrique de raison $q=0,83$.

Critique de cette solution :

• L'énoncé ne note pas les nombres u_0, u_1, u_2 …..
• Les quotients ne sont pas écrits dans le bon ordre.
• Les quotients ne tombent pas justes. 0,83 est une valeur approchée des quotients.
On ne peut comparer des nombres lorsqu'ils sont écrits en valeur approchée.

Le 23-16-2018

Marion Hucher

« On va calculer les raisons pour voir si elles sont égales »
$$\frac{6}{5}=1,2$$
$$\frac{7,2}{6}=1,2$$
$$\frac{8,64}{7,2}=1,2$$
$$\frac{10,368}{8,64}=1,2$$

Ces nombres forment donc une suite géométrique de raison $q=1,2$.

$\boxed{2}$

1°) « Les nombres 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 forment dans cet ordre une suite **géométrique** de raison $\boldsymbol{q=2}$ ».

2°) « Les nombres 1 ; – 1 ; 1 ; – 1 ; 1 forment dans cet ordre une suite **géométrique** de raison $\boldsymbol{q=-1}$ ».

1°) Explication : méthode des quotients ou visualisation directe (on multiplie chaque terme par 2 pour obtenir le suivant)

2°) Explication : méthode des quotients ou visualisation directe (on multiplie chaque terme par – 1 pour obtenir le suivant)

Notations :

La raison d'une suite arithmétique est usuellement notée *r*.

La raison d'une suite géométrique est usuellement notée *q*.

$\boxed{3}$ 1°) $u_{10}=-118\ 098$ 2°) $u_5=-6250$

Solution détaillée :

Attention à la syntaxe mathématique :
- fraction élevée à une puissance
- nombre négatif élevé à une puissance

1°) (u_n) : **suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 3$**

Calculons u_{10}.

Méthode :

On sait que $u_n = u_0 \times q^n$.

n prend la valeur 10.

$u_{10} = u_0 \times q^{10}$ (formule générale avec n qui prend la valeur 10)

$= -2 \times 3^{10}$

$= -2 \times 59049$

$= -118098$

Autre rédaction possible :

D'après la formule donnant le terme général d'une suite géométrique, $u_{10} = u_0 \times q^{10}$ …

Si on voulait, on pourrait aussi utiliser la commande « rép » de la calculatrice.

2°) (u_n) : **suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = -5$**

Calculons u_5.

$u_5 = u_0 \times q^5$ (formule générale avec n qui prend la valeur 5)

$= 2 \times (-5)^5$

$= 2 \times (-3125)$

$= -6250$

$\boxed{4}$ (u_n) : **suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$**

1°) **Écrivons u_{n+1} en fonction de u_n.**

On a : $u_{n+1} = u_n \times q$ ce qui s'écrit $u_{n+1} = u_n \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ soit $u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n$ (il n'y a pas de calcul à faire).

On pourrait même écrire $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2}$.

2°) **Écrivons u_n en fonction de n.**

On a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Donc $u_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (phrase quantifiée implicitement).

Les exercices $\boxed{5}$ à $\boxed{7}$ constituent une application des suites géométriques dans des situations concrètes.
Le recours aux suites géométrique permet de modéliser aisément des situations d'évolution.
Pour visualiser ces suites, on peut (et c'est même fortement recommandé) utiliser la calculatrice ou un tableur.
Modélisations de situations par des suites géométriques.

Visualisation sur calculatrice ou programmation sur calculatrice.

$\boxed{5}$ **Évolution d'un capital (placement bancaire)**

On s'intéresse aux intérêts bancaires.

1°)

• **Calculons le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 %.**

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % est égal à $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.

Chaque année le capital est multiplié par 1,05.

• **Exprimons C_{n+1} en fonction de C_n.**

1[ère] méthode :

On utilise le coefficient multiplicateur calculé précédemment.
Chaque année le capital est multiplié par 1,05.
Cela se traduit par la relation : $\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} = 1,05\ C_n$.

On devrait écrire $C_{n+1} = 1,05\ C_n$ de manière à obtenir une phrase quantifiée explicitement [cf. notion de phrase quantifiée (explicitement, implicitement)].
Mieux vaut éviter la quantification implicite.

On en déduit que la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 3000$ et de raison $q = 1,05$.

2e méthode :

On redémontre la formule.

$$C_{n+1}=C_n+\frac{5}{100}C_n$$
$$C_{n+1}=C_n+0,05C_n$$
$$C_{n+1}=1,05C_n$$

2°) **Exprimons C_n en fonction de n.**

$\forall n\in\mathbb{N}\quad C_n=C_0\times q^n$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad C_n=3000\times(1,05)^n$

La seule lettre qui doit apparaître dans le membre de droite est *n*.

3°) **Calculons la valeur acquise par le capital au bout de 5 ans.**

La valeur obtenue au bout de 5 ans est C_5.

$C_5=3000\times(1,05)^5$
$C_5=3828,84...$ (nombre décimal dont on a écrit les deux premières décimales)

Les petits points signifient qu'il y a d'autres décimales qui ne sont pas écrites.
En fait, on a : $C_5 =$ 3828,844688 (valeur exacte)

On a donc : $C_5\approx 3829$ (valeur arrondie à l'unité).

La valeur acquise par le capital au bout de cinq ans est environ égale à 3 829 euros.

6 Évolution d'une population

2000 habitants en 1998

augmentation de 3 % par an

P_n : population au bout de *n* années

1°)

• **Exprimons P_{n+1} en fonction de P_n.**

1ère méthode :

$$P_{n+1}=P_n+\frac{3}{100}P_n$$

Donc : $P_{n+1}=1,03\,P_n$.

2e méthode :

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 3 % est égal à $1+\frac{3}{100}=1,03$.

Donc $P_{n+1}=1,03\,P_n$.

• **Déduisons-en la nature de (P_n).**

Pour tout entier naturel *n*, on a : $P_{n+1}=1,03\,P_n$ donc **la suite (P_n) est une suite géométrique de premier terme $P_0=2000$ et de raison $q=1,03$**.

Pour ce type de question, on n'est pas dans le cas d'une application de formule.
On raisonne sur deux années consécutives n et $n+1$ pour lesquelles on ne connaît pas les prix.
On traduit l'énoncé par une formule :
$P_{n+1}=1,03\,P_n$
Le prix de l'année $n+1$ est égal au prix de l'année *n* multiplié par 1,03.

2°) **Exprimons P_n en fonction de n.**

On applique la formule du cours pour les suites géométriques : $P_n=2000\times(1,03)^n$.

3°) **Calculons P_{10}.**

$P_{10}=2000\times1,03^{10}$
$=2687,832759$ (le résultat tombe juste)

$P_{10}\approx 2688$ (valeur arrondie à l'unité)

7 Évolution d'un prix

1°) **Expression de P_{n+1} en fonction de P_n et nature de la suite (P_n).**

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 15 % est égal à $1-\frac{15}{100}=1-0,15=0,85$.

On a donc $P_{n+1}=0,85\,P_n$.

On en déduit que **la suite (P_n) est une suite géométrique de premier terme $P_0=1800$ et de raison $q=0,85$.**

2°) **Expression de P_n en fonction de n.**

On a : $P_n=P_0\times q^n$ pour tout entier naturel *n*.
D'où : $P_n=1800\times(0,85)^n$.

3°) **Détermination du nombre d'années au bout duquel la cote de ce matériel sera inférieure à 450 €.**

Une première remarque pour commencer :
L'énoncé utilise implicitement le fait que la suite (P_n) est strictement décroissante.
On va utiliser ce résultat sans le démontrer (l'étude du sens de variation des suites numériques sera vue plus tard dans un chapitre spécial).
On peut néanmoins en avoir aisément une idée en représentant la suite sous forme d'un nuage de points dans un repère.

1ère méthode :

On rentre la fonction $f : x \mapsto 1800 \times 0{,}85^x$ dans la calculatrice.

On regarde le tableau de valeurs avec un pas de 1.
Le premier entier tel que $f(x) < 450$ est 9.

2e méthode : calculs successifs des termes de la suite

$P_1 = 1800 \times (0{,}85)^1$
$= 1530$

$P_2 = 1800 \times (0{,}85)^2$
$= 1300{,}5$

$P_3 = 1800 \times (0{,}85)^3$
$= 1105{,}425$

$P_4 = 1800 \times (0{,}85)^4$
$= 939{,}61125$ (nombre décimal ; tombe juste)

$P_5 = 1800 \times (0{,}85)^5$
$= 798{,}6695625$ (nombre décimal ; tombe juste comme on le voit en faisant le test des décimales cachées)

$P_6 = 1800 \times (0{,}85)^6$
$= 678{,}869128...$ (nombre décimal ; il y a d'autres décimales dites « cachées »qu'on peut obtenir en faisant le résultat affiché par la calculatrice – 678)

$P_7 = 1800 \times (0{,}85)^7$
$= 577{,}038758...$

$P_8 = 1800 \times (0{,}85)^8$
$= 490{,}482945...$

$P_9 = 1800 \times (0{,}85)^9$
$= 416{,}910503...$

Remarque : On pourrait utiliser la commande « rép » pour effectuer tous ces calculs.

P_6, P_7 … sont tous des nombres décimaux (comme d'ailleurs tous les termes de la suite) mais on s'est contenté d'écrire seulement le début de leur écritures décimales.

La cote du matériel sera inférieure à 450 € au bout de 9 ans.

On peut faire moins de tests.

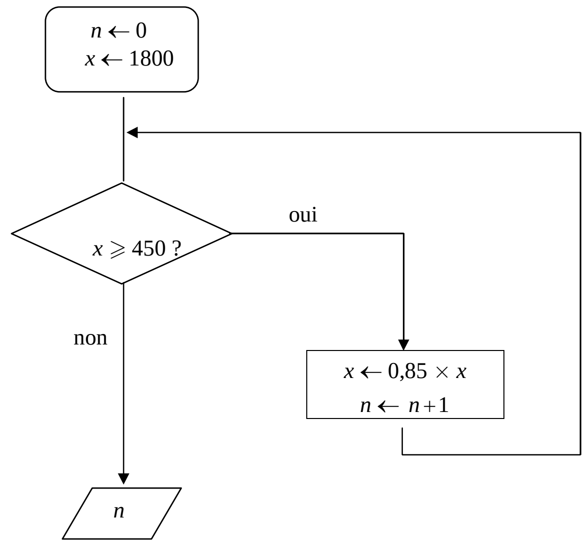
Faire P_{10} $\rightarrow$ P_{10} trop petit ($P_{10} \approx 354$)
Faire P_5 $\rightarrow$ P_5 trop grand ($P_5 \approx 798$)
Faire P_8 $\rightarrow$ P_8 trop grand ($P_8 \approx 490$)
Faire P_9 $\rightarrow$ P_9 trop grand ($P_9 \approx 416$)

Méthode apparentée à la méthode de dichotomie.

$\rightarrow$ Permet de réduire les nombre d'essais (de tests).

Autre méthode (qui n'est pas celle demandée par l'énoncé) :

On peut utiliser un programme (sur calculatrice ou sur ordinateur) ou un tableur.
L'algorithme correspondant au programme est représenté sur l'organigramme ci-dessous.



On rédige l'algorithme en langage naturel à l'aide d'une boucle « Tantque » car on ne connaît pas le nombre d'itérations à l'avance (à la différence des boucles « Pour ») et il n'y a pas de moyen simple de le calculer (la boucle « Tantque » permet de s'en passer).

Initialisation :
n prend la valeur 0
x prend la valeur 1800

Traitement :
Tantque $x \geqslant 450$ **Faire**
    x prend la valeur $0,85 \times x$
    n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

Programme correspondant en langage TI :

```
: 0 → N
: 1800 → X
: While X ≥ 450
: 0.85∗ X → X
:  N+1 → N
: End
: Disp N
```

Question : Quel est le rapport entre x et n ?
Il n'y a pas de rapport direct entre x et n : n correspond au nombre d'années et x correspond au prix.
Dans notre algorithme, les valeurs évoluent ensemble mais leur calcul est indépendant.

Question d'Adrien Fructus le mercredi 29 janvier 2014 :
« Je ne vois pas le rapport entre n et x dans l'algorithme. »

Faisons tourner l'algorithme « à la main ».

n prend la valeur 0
x prend la valeur 1800 (valeur de P_0)

n prend la valeur 1
x prend la valeur $1800 \times 0,85 = 1530$ (valeur de P_1)

n prend la valeur 2
x prend la valeur $1530 \times 0,85 = 1300,5$ (valeur de P_2)

n prend la valeur 3
x prend la valeur 1105,425 (valeur de P_3)

n prend la valeur 4
x prend la valeur 939,61125 (valeur de P_4)

n prend la valeur 5
x prend la valeur 798,6695625 (valeur de P_5)

n prend la valeur 6
x prend la valeur 678,8691281 (valeur de P_6)

n prend la valeur 7
x prend la valeur 577,0387589 (valeur de P_7)

n prend la valeur 8
x prend la valeur 490,4829451 (valeur de P_8)

On pourrait aussi utiliser la fonction logarithme népérien qui sera vue en Terminale ce qui permettrait de résoudre le problème par le calcul.

$\boxed{8}$ **(u_n) : suite géométrique telle que $u_3 = 12,8$ et $u_4 = 20,48$**

Calculons la raison q et u_0.

Pour trouver q, on peut appliquer la propriété des quotients.

On a : $q = \dfrac{u_4}{u_3}$. On trouve : $q = 1,6$.

On a : $u_3 = u_0 \times 1,6^3$ donc $u_0 = \dfrac{u_3}{1,6^3}$ d'où $u_0 = 3,125$.

$\boxed{9}$

Attention, la suite (u_n) commence à partir de l'indice 1. On utilise donc la formule du cours : $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$.

On garde u_1.
On ne calcule pas u_0 !

1°) **(u_n) : suite géométrique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $q = \sqrt{2}$**

Calculons u_{10}.

$$u_{10} = u_1 \times q^9 = 3 \times \left(\sqrt{2}\right)^9 = 3 \times \left(\sqrt{2}\right)^{8+1} = 3 \times \left(\sqrt{2}\right)^8 \times \sqrt{2} = 3 \times \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^4 \times \sqrt{2} = 3 \times 2^4 \times \sqrt{2} = 48\sqrt{2}$$

On n'utilise pas la calculatrice afin d'obtenir la valeur exacte.

2°) (u_n) **: suite géométrique de premier terme $u_1 = 0{,}1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$**

Calculons u_6.

$$u_6 = u_1 \times q^{6-1} = 0{,}1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}1 \times \frac{1^5}{2^5} = 0{,}1 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{32} = \frac{1}{320}$$

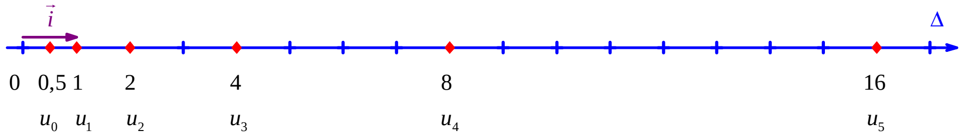
$$u_6 = 0{,}1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}1 \times \frac{1^5}{2^5} = \frac{0{,}1}{32} = 0{,}003125$$

$\boxed{\textbf{10}}$

(u_n) : suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 2$

On ne place pas dans un repère du plan mais su un axe comme le dit l'énoncé.

On ne représente pas la raison *q*.



On pourrait mettre les demi-graduations.