TS1

Contrôle du vendredi 27 janvier 2012 (1 h)

Ne rien écrire, ne rien entourer, ne rien surligner sur cet énoncé.

Résultats non soulignés ou non encadrés sur la copie : – 1

Prénom et nom : ……………………………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2)	II. (4)	III. (1)	IV. (5)	V. (6)	VI. (2)
………	………	………	………	………	………

- **Les exercices I, II, III, VI doivent être traités sur le sujet.**
- **Les exercices IV et V doivent être traités sur la copie.**
- **Les traits de fraction ainsi que les symboles de racine carrée doivent faits à la règle.**

I. (2 points) On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Compléter directement sur cette feuille (calculs préalables au brouillon) en n'écrivant qu'un seul résultat.

Pour tout réel x, $f'(x) =$ ……………………….. (donner le résultat sous la forme d'un seul quotient).

II. (4 points) Vrai ou faux ?

Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse sans justifier les réponses.

Chaque réponse juste rapporte 1 point.
Chaque réponse fausse enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.

Compléter le tableau par V ou F.

Affirmation 1 : « La fonction "racine carrée" est dérivable en 0. »

Affirmation 2 : « La fonction $x \mapsto x\,|\,x\,|$ est dérivable en 0. »

Affirmation 3 : « La fonction $x \mapsto \sin x \times e^x$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \cos x \times e^x$. »

Affirmation 4 : « La tangente à la courbe de la fonction exponentielle en un point A quelconque d'abscisse a a pour équation $y = e^a\,(x + 1 - a)$. »

Affirmation	**1**	**2**	**3**	**4**	
Réponse	………	………	………	………	**Total :** ………

III. (1 point) Logique

Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan, deux à deux distincts.

> Pour démontrer que ABCD est un losange, il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et que AB = AD.

Cette phrase est :

□ vraie □ fausse

IV. (5 points) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A et B les points d'affixes respectives 1 et 2i.

Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on pose $z' = \dfrac{z - 2i}{z - 1}$.

Les deux questions sont indépendantes.

Aucune figure n'est demandée sur la copie.

1°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan d'affixe z, tels que $|\,z'\,| = 1$.

2°) a) Exprimer $z' - 1$ en fonction de z sous la forme d'un seul quotient, le plus simple.

b) Déterminer l'ensemble F des points M du plan d'affixe z, tels que $|\,z' - 1\,| = \sqrt{5}$.

Modèle de rédaction pour les ensembles *E* et *F* <u>à réécrire et à respecter scrupuleusement</u> :

• *On rédigera la recherche en utilisant une « chaîne » d'équivalences (à écrire les unes en dessous des autres, sans couper sur deux pages) sur le modèle suivant :*

Soit M un point quelconque du plan d'affixe $z \neq 1$.

$M \in E \Leftrightarrow$ ……………………..

$\Leftrightarrow$ ……………………..

$\Leftrightarrow$ ……………………..

• *On conclura ainsi :*

« L'ensemble *E* est …………………………………………………….. ».

V. (6 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$ pour tout entier naturel *n*.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de *n* (une telle expression n'existe pas !).

On respectera la notation d'une suite avec les parenthèses.

1°) On admet (pour des raisons de temps !) les propriétés suivantes rédigées sous la forme de phases quantifiées (la quantification est extrêmement importante du point de vue du sens) que l'on peut démontrer par récurrence :

Propriété P_1 : « pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n \leqslant 4$ ».

Propriété P_2 : « pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».

À l'aide de ces deux propriétés, et en utilisant le vocabulaire adapté, justifier que la suite (u_n) converge.
Citer le théorème utilisé.

2°) On note *l* la limite de la suite.

a) Justifier brièvement que $l \geqslant 2$.

b) Justifier rigoureusement que *l* vérifie l'égalité : $l = 2 + \ln l$.

3°) On admet sans démonstration que, pour tout entier naturel *n*, on a : $|u_n - l| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

À l'aide de cette inégalité, donner <u>un</u> entier naturel N tel que : $(n \geqslant N) \Rightarrow (|u_n - l| \leqslant 10^{-3})$ (c'est-à-dire tel que les termes d'indice supérieur ou égal à N soient une valeur approchée à 10^{-3} près de *l*).
On justifiera de manière extrêmement brève le choix de N.

VI. (2 points)

Partie A

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel permettant de saisir une valeur de *n* et d'afficher en sortie la valeur de u_n correspondante.
Compléter le cadre vide de cet algorithme dans la partie « Traitement ».

Variables :
n, *k* : entiers naturels
S : réel

Entrées :
Saisir *n*

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour *k* allant de 0 à *n* (avec un pas de 1) **Faire**
  S prend la valeur *S* + $\boxed{}$
FinPour

Sortie :
Afficher *S*

2°) Donner une expression simplifiée de u_n en fonction de *n* (sans le symbole Σ).

$u_n =$ ....

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} k2^{k-1}$.

On admet que l'on a : $v_n = (n-1) \times 2^n + 1$ (la démonstration se fait aisément par récurrence).

À l'aide de cette formule sommatoire, donner la valeur de v_{20}.

$v_{20} =$ ....

Corrigé du contrôle du 27 janvier 2012

I. $f : x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \times \sqrt{1+x^2} + x \times \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$ (application de la formule de dérivation d'un produit et de la racine carrée d'une fonction)

$$= \sqrt{1+x^2} + x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 + x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$$

II. Vrai ou faux ?

Affirmation 1 : « La fonction "racine carrée" est dérivable en 0. » **Faux**

$f : x \mapsto \sqrt{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc la fonction *f* n'est pas dérivable en 0.

Affirmation 2 : « La fonction $x \mapsto x\,|\,x\,|$ est dérivable en 0. » » **Vrai**

$f : x \mapsto x\,|\,x\,|$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x|\,x\,|}{x} = |\,x\,|$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} |\,x\,| = 0$ donc la fonction *f* est dérivable en 0 et *f* ' (0) = 0.

Affirmation 3 : « La fonction $x \mapsto \sin x \times \mathrm{e}^x$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \cos x \times \mathrm{e}^x$. » **Faux**

$f : x \mapsto \sin x \times \mathrm{e}^x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sin x \times \mathrm{e}^x + \cos x \times \mathrm{e}^x$

Affirmation 4 : « La tangente à la courbe de la fonction exponentielle en un point A quelconque d'abscisse a a pour équation $y = \mathrm{e}^a (x + 1 - a)$. » **Vrai**

$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \mathrm{e}^x$

La tangente à la courbe de f en un point A quelconque d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ soit $y = \mathrm{e}^a (x - a) + \mathrm{e}^a$ ou encore $y = \mathrm{e}^a (x + 1 - a)$.

III. Logique

> Pour démontrer que ABCD est un losange, il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et que AB = AD.

Ce raisonnement est faux.
En effet, « Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires » signifie que ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].

IV.

A (1) B (2i)

À tout point M de P, distinct de A, d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z - 2\mathrm{i}}{z - 1}$.

1°) **Déterminons l'ensemble *E* des points M du plan d'affixe *z*, tels que | *z'* | = 1.**

$$\begin{aligned}
\text{M} \in E \ &\Leftrightarrow |\, z' \,| = 1\\
&\Leftrightarrow \left| \frac{z-2\text{i}}{z-1} \right| = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{|\, z-2\text{i} \,|}{|\, z-1 \,|} = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{\text{MB}}{\text{MA}} = 1 \quad \text{[on est obligé d'arriver à une étape où l'on n'a plus de } z\text{, mais uniquement des distances]}\\
&\Leftrightarrow \text{MB} = \text{MA}
\end{aligned}$$

On ne peut s'arrêter à une étape avec | *z* – 2i | = | *z* – 1 | et passer directement à la conclusion.
Il faut absolument avoir interprété géométriquement les deux modules en termes de distances.

Il était extrêmement maladroit de repasser en écriture algébrique pour les affixes.

Conclusion : L'ensemble *E* est la médiatrice du segment [AB].

2°)

a) **Exprimons *z '* – 1 en fonction de *z*.**

$$\begin{aligned}
z' - 1 &= \frac{z-2\text{i}}{z-1} - 1\\
&= \frac{z-2\text{i}}{z-1} - 1\\
&= \frac{z-2\text{i}-(z-1)}{z-1}\\
&= \frac{1-2\text{i}}{z-1}
\end{aligned}$$

b) **Déterminons l'ensemble *F* des points M du plan d'affixe *z*, tels que | *z'* – 1 | = $\sqrt{5}$.**

Déterminons l'ensemble *F* des points M du plan d'affixe *z*, tels que | *z'* – 1 | = $\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}
\text{M} \in F \ &\Leftrightarrow |\, z' - 1 \,| = \sqrt{5}\\
&\Leftrightarrow \left| \frac{1-2\text{i}}{z-1} \right| = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{|\, 1-2\text{i} \,|}{|\, z-1 \,|} = \sqrt{5} \quad \text{(il n'était pas utile de relier | 1 – 2i | avec AB comme l'ont fait beaucoup d'élèves !)}\\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{\text{MA}} = \sqrt{5}\\
&\Leftrightarrow \text{MA} = 1
\end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble *F* est le cercle de centre A et de rayon 1.

V.

$$(u_n)\ \left|\ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 2 + \ln u_n \end{array}\right.$$

Il est intéressant de programmer le calcul des termes sur la calculatrice.

1°) Justifions que la suite (u_n) converge.

Propriété P_1 : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 4$

Propriété P_2 : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$

D'après la propriété P_1, la suite (u_n) est majorée par 4.

D'après la propriété P_2, la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

Or toute suite croissante majorée converge (propriété du cours), donc on en déduit que la suite (u_n) converge.

2°) $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

a) Justifions que $l \geqslant 2$.

On sait que la suite (u_n) est croissante convergente donc sa la limite est un majorant des termes de la suite (théorème du cours).

Or $u_0 = 2$.

Donc $l \geqslant 2$.

b) Justifions que l vérifie l'égalité : $l = 2 + \ln l$.

On sait que l est la limite de la suite (u_n).

D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ de manière évidente (cela est complètement indépendant du fait que (u_n) est croissante).

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} =$ l

$2 + \ln l$ (car $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 + \ln u_n$ et la fonction $x \mapsto 2 + \ln x$ est continue sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$)

Par unicité de la limite d'une suite, $l = 2 + \ln l$.

3°) On admet que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |u_n - l| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (1).

Déterminons un entier naturel N tel que : ($n \geqslant$ N) $\Rightarrow$ ($|u_n - l| \leqslant 10^{-3}$).

D'après (1), pour que $|u_n - l| \leqslant 10^{-3}$ **il suffit** de choisir n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-3}$ (2).

terme exact à employer

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$

$\Leftrightarrow 2^n \geqslant 10^3$

$\Leftrightarrow n \ln 2 \geqslant \ln 10^3$

$\Leftrightarrow n \ln 2 \geqslant 3 \ln 10$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{3\ln 10}{\ln 2}$

D'après la calculatrice, $\dfrac{3\ln 10}{\ln 2} = 9{,}965\ldots$

On choisit N = 10.

$(\, n \geqslant 10 \,) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-3}$

Or : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |u_n - l| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc ($n \geqslant 10$) $\Rightarrow$ ($|u_n - l| \leqslant 10^{-3}$).

VI.

Partie A

$u_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n$ $\qquad$ $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k$

1°)

Variables :
n, *k* : entiers naturels
S : réel

Entrées :
Saisir *n*

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour *k* allant de 0 à *n* (avec un pas de 1) **Faire**

S prend la valeur *S* + $\boxed{2^k}$

FinPour

Sortie :
Afficher *S*

2°) Expression simplifiée de u_n en fonction de *n* (sans le symbole Σ) :

u_n est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

On applique la formule sommatoire donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\boxed{u_n = 2^{n+1} - 1}$$

Partie B

$v_n = \sum_{k=1}^{k=n} k2^{k-1} \quad (n \geqslant 1)$

$v_n = (n-1) \times 2^n + 1$

On remplace *n* par 20 dans cette formule. On obtient : v_{20} = 19 922 945