TS spécialité — Devoir pour le vendredi 3 février 2012

On tâchera chaque fois de rédiger des réponses les plus claires et les plus concises possibles.

I. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.

On rappelle que $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Calculer $\text{PGCD}(S_n, S_{n+1})$.

On distinguera deux cas suivant la parité de n.

II. 1°) Démontrer que pour tout couple (x, y) d'entiers naturels $\text{PGCD}(x+y, 2x+3y) = \text{PGCD}(x, y)$.

2°) Utiliser ce résultat pour démontrer que pour tout entier naturel n les nombres $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$ sont premiers entre eux.

III.

1°) Rédiger <u>en langage naturel</u> (et non dans le langage de la calculatrice) un algorithme comportant une boucle permettant de déterminer les cinq premières valeurs de l'entier naturel n tel que le nombre $2n^2 - 1$ soit un carré parfait*.

- Écrire cet algorithme dans un cadre sur une seule page (il ne doit pas se poursuivre sur deux pages).
- Indiquer clairement les différentes étapes de l'algorithme.
- Respecter les indentations éventuelles.

2°) Programmer cet algorithme sur calculatrice (indiquer la marque) ou sur un logiciel (indiquer lequel).
Donner les cinq premières valeurs de n répondant au problème.

* Un carré parfait est le carré d'un autre entier.