1ère S

Les suites géométriques

Objectif du chapitre : Étudier un nouveau type de suites appelées suites géométriques.

I. Exemple introductif

Cet exemple correspond à un cas concret de la « vraie » vie.

1°) Situation

Le 1er janvier 2000, une personne place un capital de 1000 euros à intérêts composés au taux annuel de 4 %.
Elle désire connaître l'évolution de son capital pour les années à venir.

2°) Tableau de valeurs

Comme dans le chapitre précédent, on modélise la situation par une suite mais cette suite sera d'un type différent de celui du chapitre précédent (ça ne sera pas une suite arithmétique).
Contrairement à un placement à intérêt simple, l'intérêt n'est pas fixe.
Il doit être recalculé chaque année à partir du capitale de l'année d'avant.

Contrairement à ce que nous avions étudié dans le chapitre d'avant, pour des intérêts composés les intérêts s'adaptent.
Les intérêts sont à chaque fois calculés sur les intérêts de l'année précédente.

Durée du placement (en années)	0	1	2	3
Valeur acquise par le capital	$C_0 = 1000$	$C_1 = 1040$	$C_2 = 1081,6$	$C_3 = 1124,864$

× 1,04 × 1,04 × 1,04

3°) Vocabulaire

La valeur acquise par le capital au cours du temps est chaque fois multipliée par $1+\dfrac{4}{100}=1,04$.

On dit que les nombres C_0, C_1, C_2, … forment une **suite géométrique** de raison 1,04.

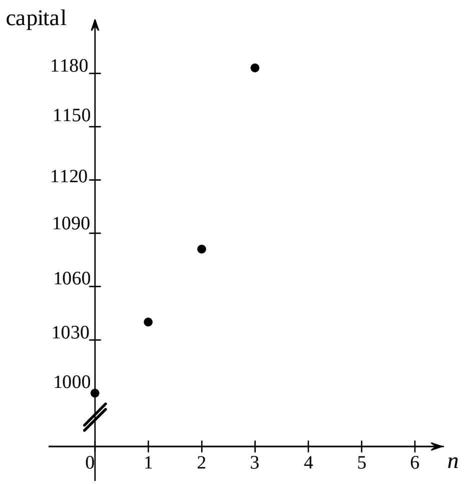
Commentaire : comparaison entre suites arithmétiques et suites géométriques

Une suite arithmétique (intérêt simple) c'est toujours 30 % de la base alors que pour une suite géométrique (intérêt composé) on se « rebase » sur le nouveau résultat.

4°) Représentation graphique

Dans un repère, on place n en abscisse et les valeurs du capital en ordonnée.
On place les points de coordonnées (0 ; 1000), (1 ; 1040) etc.

On ne relie pas ces points.



(Observer l'axe des ordonnées qui est brisé ; les indices sont en abscisses ; les valeurs des termes sont en ordonnée).

Les points de la représentation graphique ne sont **pas alignés**.

Pour deux années consécutives n et $n + 1$, on a : $C_{n+1} = 1,04 \times C_n$.

N.B. :

Ne pas oublier que le n représente le « numéro » de l'année.

L'année $n + 1$ est l'année qui suit l'année n.

Cette formule traduit mathématiquement le fait que le capital de l'année $n + 1$ est égal au capital de l'année n multiplié par n.

II. Définition et conséquences

1°) Définition

Une **suite géométrique** est une suite de nombres u_0, u_1, u_2, ….u_n où chacun (sauf le premier) s'obtient en **multipliant** le précédent par un nombre fixe q appelé la **raison**.

On conserve le même nom de raison que pour les suites arithmétiques mais on l'appelle q au lieu de r pour différencier.

2°) Exercice

Calculer les 5 premiers termes de la suite géométrique définie par son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $q = 2$.

$u_0 = 3$	(**1**[er] **terme** ou **terme initial**)
$u_1 = 6$	(2[e] terme) Chaque terme de la suite sauf le 1[er] s'obtient en multipliant le précédent par 2.
$u_2 = 12$	(3[e] terme)
$u_3 = 24$	(4[e] terme)
$u_4 = 48$	(5[e] terme)

3°) Remarque

Pour définir une suite géométrique, il faut donner le **premier terme** et la **raison** de la suite.
Parfois le premier terme de la suite est u_1 au lieu de u_0 ; mais l'énoncé le précise toujours.

III. Formule de récurrence

1°) Relation entre deux termes consécutifs

(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q}$.
(**formule littérale** qui exprime que chaque terme de la suite, sauf le 1[er], s'obtient **en multipliant** le précédent par la raison q).
Cette relation est appelée « **formule de récurrence** ».

Dans la relation, on peut remplacer n par n'importe quelle valeur entière.

Exemple :

$u_3 = u_2 \times q$
$u_5 = u_4 \times q$

2°) Propriété des quotients

Pour une suite géométrique dont tous les termes sont non nuls, le quotient de deux termes consécutifs (c'est-à-dire entre un terme sur le précédent) est constante égale à la raison q.

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ... = q$$

Cette propriété justifie la notation q pour la raison (q comme « quotient »).

3°) Remarque (corollaire de la propriété précédente)

Si une suite (u_n) dont tous les termes sont non nuls est telle que $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, alors cette suite **n'est pas géométrique**.

Exemple :

$\frac{3}{2} \neq \frac{5}{3}$ donc les nombres 2, 3, 5 ne forment pas, dans cet ordre, une suite géométrique.

4°) Application : calcul des termes sur tableurs

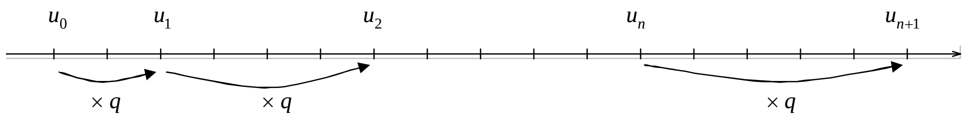
Exemple :

(u_n) suite géométrique de 1[er] terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

	A	**B**
1	n (indices)	u_n (termes)
2	0	5
3	1	= B2*3
4	2	« tiré vers le bas »
5	3	

IV. Calcul des termes

1°) Recherche d'une formule générale



$u_1 = u_0 \times q$
$u_2 = u_0 \times q^2$
$u_3 = u_0 \times q^3$

2°) Formule de calcul des termes (à savoir par cœur)

Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$.
le même n

Repasser en rouge le n en indice pour u_n et le n dans le second membre.

3°) Exercice

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.
Exprimer u_n en fonction de n (n étant un entier naturel quelconque).
Calculer u_6 en utilisant cette formule.

D'après la formule précédente, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

donc $\boxed{u_n = 3 \times 2^n}$ (on donne le résultat sous cette forme)

On remplace n par 6 dans l'expression précédente.

$u_6 = 3 \times 2^6$

$u_6 = 3 \times 64$

$\boxed{u_6 = 192}$

Rappel : pour calculer des puissances avec la calculatrice, on utilise la touche $\boxed{\wedge}$.

4°) Adaptation de la formule lorsque la suite est définie à partir de l'indice 1

Dans certains cas, la suite est définie non pas à partir de l'indice 0 mais de l'indice 1.
(Ceci est toujours précisé dans l'énoncé).

Il faut alors adapter la formule de calcul des termes.

Dans certains cas, on décide de prendre pour « base » u_1, ce qui modifie les formule.

$u_2 = u_1 \times q$ (on prend pour « base » u_1)

$u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q^2$

$u_4 = u_3 \times q = u_1 \times q^3$

On peut observer que
dans la première égalité : 1 + 1 (exposant de q = 2),
dans la deuxième égalité : 1 + 2 (exposant de q = 3),
dans la troisième égalité : 1 + 3 (exposant de q = 4).

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Exemple :

$u_{10} = u_1 \times q^{10-1} = u_1 \times q^9$

V. Rappels sur les pourcentages (pourcentages d'augmentation ou de diminution)

Rappel sur les coefficients multiplicateurs

• Le **coefficient multiplicateur** associé à une **augmentation** de t % est égal à : $\text{CM} = 1 + \frac{t}{100}$.

• Le **coefficient multiplicateur** associé à une **diminution** de t % est égale à : $\text{CM} = 1 - \frac{t}{100}$.

Pour calculer la valeur après une augmentation ou après une diminution, on multiplie la valeur de départ par le coefficient multiplicateur.

VI. Utilisation de suites géométriques pour modéliser certaines situations concrètes

Même remarque que pour les suites arithmétiques pour les suites modélisant des situations concrètes :

Exemple :

On note u_n le salaire, le loyer, le capital… l'année 2008 + n

Voir exercices.