$1^{\text{ère}}$ S

Les suites arithmétiques (1)

Objectif :

Étudier une nouvelle notion qui n'a pas de rapport avec les fonctions : les suites arithmétiques.

I. Exemple introductif

On va s'intéresser à un phénomène d'évolution discret que l'on va modéliser par une suite. Cela va permettre de comprendre tout de suite la notion et son utilisation concret.

1°) Situation

Le 1er janvier 2000, une personne place un capital de 1000 euros à intérêts simples au taux annuel de 3 %.
Elle désire connaître l'évolution de son capital pour les années à venir.

2°) Tableau de valeurs

$\frac{3}{100} \times 1000 = 30$: **intérêt annuel**

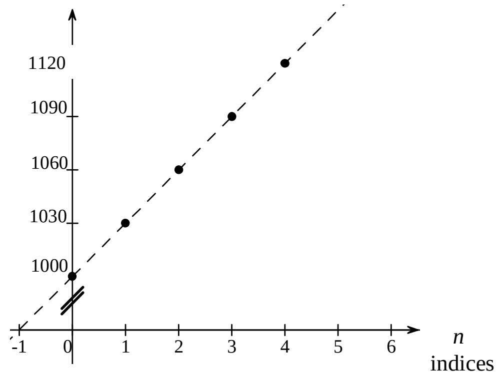
Durée du placement (en années)	0	1	2	3
Valeur acquise par le capital	$C_0 = 1000$	$C_1 = 1030$	$C_2 = 1060$	$C_3 = 1090$

+ 30 + 30 + 30

3°) Vocabulaire

La valeur acquise au cours du temps augmente régulièrement à raison de 30 € par an.
On dit que les nombres C_0, C_1, C_2, … forment une **suite arithmétique** de raison 30.

4°) Représentation graphique



(Observer l'axe des ordonnées qui est brisé ; les indices sont en abscisses ; les valeurs des termes sont en ordonnée).
Tous les points de la représentation graphique sont **alignés** sur une même droite qui ne passe pas par l'origine du repère.

Pour deux années consécutives n et $n+1$, on a : $C_{n+1} = C_n + 30$.

On peut aussi écrire $C_n = C_{n-1} + 30$.

On peut observer que chaque capital est la moyenne arithmétique de ceux qui l'encadrent.

Commentaire :

Dans cet exemple, on voit que l'on fait toujours + 30, + 30, + 30 ….
Le 30 correspond à la valeur de l'intérêt qui a été calculé par rapport au capital de départ (3 % de 1000).
L'intérêt est toujours calculé sur la somme de départ. On verra dans le chapitre suivant le cas où l'intérêt « s'adapte » sur la valeur d'avant (cas des intérêts composés qui donneront lieu aux suites géométriques).

capital → capital de départ
capital → capital + quelque chose

$C_3 = 1090$ = capital + intérêts des 3 années
$= C_0 + 3 \times \boxed{30}$

En littéral,

$C_{\boxed{n}} = C_0 + \boxed{n} \times 30$

II. Définition et conséquences

Objectif de ce paragraphe : passer au cas général en dehors des intérêts.

1°) Définition

Une **suite arithmétique** est une suite de nombres u_0, u_1, u_2, ….u_n où chacun (sauf le premier) s'obtient en ajoutant au précédent un nombre fixe r appelé la **raison**.

Dans l'exemple du **I** :

u_0, u_1, u_2 … représentent les nombres 1000, 1030, 1060…
Le r représente le nombre 30 que l'on doit ajouter à chaque terme pour obtenir le suivant (que l'on appelle la raison).

2°) Exercice

Donner les 5 premiers termes de la suite arithmétique définie par son premier terme $u_0 = -4$ et sa raison $r = 3$.

$u_0 = -4$ (**1er terme** ou **terme initial**)
$u_1 = -1$ (2e terme)
$u_2 = 2$ (3e terme)
$u_3 = 5$ (4e terme)
$u_4 = 8$ (5e terme)

3°) Notations

- La suite de termes u_0, u_1, u_2 … est notée (u_n) avec des parenthèses.

- Au lieu de u_0, u_1 … on note aussi parfois $u(0)$, $u(1)$ …

N.B. : Dans l'exemple du **I** (comme dans beaucoup d'autres situations qui correspondent à des pourcentages d'évolution), le 0 ou le 1… représentent l'année.

4°) Remarque

Pour définir une suite arithmétique, il faut donner le **premier terme** et la **raison** de la suite.
Parfois le premier terme de la suite est u_1 au lieu de u_0 ; mais l'énoncé le précise toujours.

5°) Représentation sur un axe

Les points définissent une subdivision régulière.

Il s'agit d'une image mentale forte à avoir constamment en tête.

III. Formule de récurrence

1°) Relation entre deux termes consécutifs

• Exemples

$u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r$

$u_3 = u_2 + r$

etc.

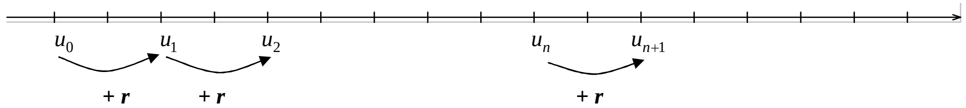
Le u_0 est toujours le premier terme.

• Écriture d'une relation dans le cas général

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.

le même n

(**formule littérale** qui exprime que chaque terme de la suite, sauf le 1er, s'obtient en ajoutant au précédent la raison r).
Cette relation est appelée **« formule de récurrence »**.



2°) Propriété des différences

Pour une suite arithmétique, la différence entre deux termes consécutifs (c'est-à-dire entre un terme et le précédent) est **constante** égale à la raison r.

$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = ... = r$

Pour savoir si une suite est arithmétique, on regarde si la différence entre chaque terme (c'est-à-dire entre deux termes consécutifs) est bien égale au même nombre.

Dans l'exemple du **I**,

$1030 - 1000 = 30$
$1060 - 1030 = 30$ etc.

3°) Remarque

Si une suite (u_n) est telle que $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, alors cette suite **<u>n'est pas arithmétique</u>**.

4°) Application : calcul des termes sur tableur (informatique)

Exemple :

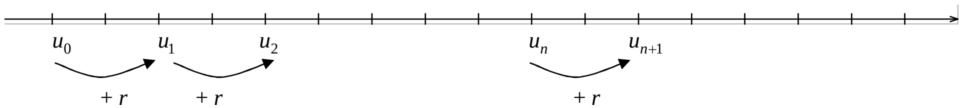
(u_n) : suite arithmétique de 1[er] terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

	A	B
1	n (indices)	u_n (termes)
2	0	5
3	1	$\boxed{= \text{B2} + 3}$
4	2	« tiré vers le bas »
5	3	

IV. <u>Calcul des termes</u>

Ce paragraphe répond à la question : concrètement, comment s'écrit une suite arithmétique ?

1°) Recherche d'une formule générale



$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_0 + 2r$
$u_3 = u_0 + 3r$

Grâce à un raisonnement de proche en proche, on établit la formule $u_n = u_0 + n \times r$.

2°) Formule de calcul des termes (à savoir par cœur)

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Repasser en rouge le n en indice pour u_n et le n dans le second membre.

3°) Exercice

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -4$ et de raison $r = 3$.
Exprimer u_n en fonction de n (n étant un entier naturel quelconque).
Calculer u_{25} en utilisant cette formule.

D'après la formule précédente, on a : $u_n = u_0 + nr$

donc $u_n = 3n - 4$ (on donne le résultat sous cette forme)

On remplace n par 25 dans l'expression précédente.

$u_{25} = 3 \times 25 - 4$

$= 71$

4°) Adaptation de la formule lorsque la suite est définie à partir de l'indice 1

Dans certains cas, la suite est définie non pas à partir de l'indice 0 mais de l'indice 1.
(Ceci est toujours précisé dans l'énoncé).

Il faut alors adapter la formule de calcul des termes.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

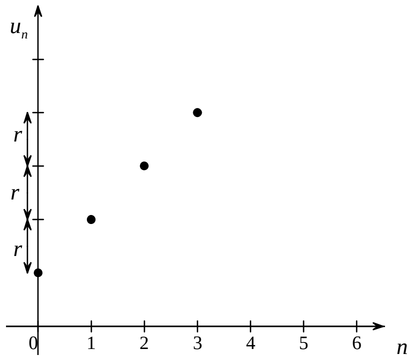
Exemples :

$u_1 = u_1 + (1-1) \times r$
$u_2 = u_1 + (2-1) \times r$

V. <u>Représentation graphique d'une suite arithmétique</u>

1°) Propriété

Tous les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont **<u>alignés sur une même droite</u>**.



2°) Conséquence

Si les points de la représentation graphique d'une suite **ne sont pas alignés**, alors cette **suite n'est pas arithmétique**.

VI. Sens de variation

• Lorsque la raison est positive, la suite est **croissante**.

• Lorsque la raison est négative, la suite est **décroissante**.

VII. Exemples de situations pouvant être modélisées par des suites arithmétiques

L'exemple du **I** (évolution d'un capital placé à intérêts simples) est un exemple concret très important de situation où interviennent les suites arithmétiques (exemple-type de modélisation) même si on peut se dire que dans la « vraie vie » ça n'existe pas.

D'autres exemples concrets issus de la vie courante où interviennent des suites arithmétiques seront donnés en exercices.

calcul des termes d'une suite arithmétique sur calculatrice : 2 moyens possibles