1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le lundi 16 janvier 2012

I. Résolution d'une équation avec paramètres

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $a\,(x + a) = b(x + b)$ (E)   d'inconnue x, où a et b sont deux réels.

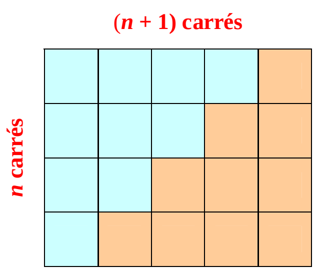
Discuter suivant les valeurs de a et b.

II. Formule sommatoire pour la somme des *n* premiers entiers naturels

1°) Soit n un entier naturel non nul fixé.

Utiliser la figure ci-dessous où chaque carré a pour côté 1 pour déterminer une formule sommatoire de $u_n = 1 + 2 + \ldots + n$.
Il s'agit de trouver une formule plus simple pour la somme u_n de tous les entiers naturels de 1 à n.

On pourra calculer des aires.



Vérifier le résultat en utilisant un logiciel de calcul formel.

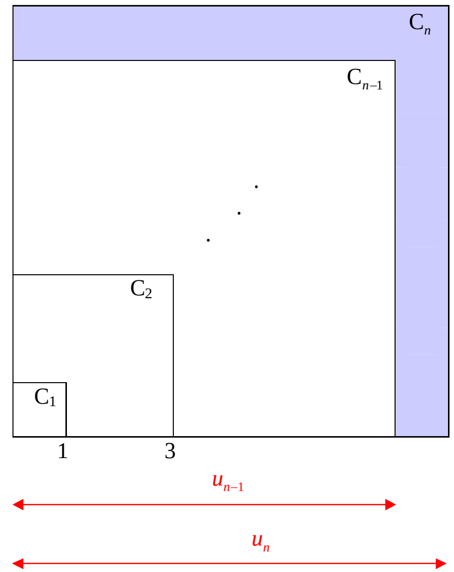
2°) **Application :**

<u>En utilisant la formule sommatoire précédente</u>, (sans refaire de figure), calculer la somme S de tous les entiers pairs compris entre 1 et 100 au sens large.

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice (en utilisant la commande permettant de calculer une somme), d'un logiciel de calcul formel (indiquer lequel) ou à l'aide d'un tableur.

III. Formule sommatoire pour la somme des cubes des *n* premiers entiers naturels

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n la somme des entiers de 1 à n et on construit la suite des carrés emboîtés C_1, C_2, … C_n comme sur la figure ci-dessous où C_n a pour côté u_n.



1°) Calculer l'aire des carrés C_1, C_2, C_3.

2°) a) Démontrer, à l'aide du résultat du **II**, que pour tout entier $k \geqslant 1$, l'aire du carré C_k est égale à :

$$\frac{k^2\left(k+1\right)^2}{4}.$$

b) En déduire que l'aire de la « bande » bleue délimitée par les carrés C_k et C_{k-1} est égale à k^3.

3°) Démontrer que l'on a : $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$.

Vérifier ce résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel (indiquer le logiciel utilisé et la démarche employée).

Cette relation donnant la somme des cubes des n premiers entiers était connue des Arabes dès 800.
Ils l'établissaient à l'aide de cette figure. Ce genre de preuve est parfois appelée une « preuve sans parole ».

Commentaires et conseils

I. Penser à la rédaction usuelle pour la résolution d'une équation :

« (E) est successivement équivalente à : … »

On se réfère à la discussion d'une équation du 1^er^ degré dans le cas général.

Les exercices II et III ont pour but de donner des démonstrations géométriques de formules sommatoires.

Cette preuve était appelée autrefois une **« preuve sans paroles »**.

Le travail sur les formules sommatoires proposé dans les exercices II et III fait suite aux devoirs précédents.

II.

1°) La figure est faite pour une valeur particulière de n : $n = 4$. Il est interdit de l'utiliser dans la suite.
On peut faire des figures pour d'autres valeurs de n mais il faut ensuite proposer une démonstration générale.

2°) Il s'agit bien d'une application. Il faut utiliser le résultat établi à la question 1°).

III.

Appliquer directement la formule de l'aire d'un carré.
Ne pas écrire de formule du genre :

$$\mathcal{A}_{\text{carré}} = \text{côté} \times \text{côté}$$

Attention aux notations : on pourra noter $\mathcal{A}_{C_k} = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ l'aire du carré C_k ou bien noter a_k l'aire du carré C_k).

Corrigé du DM du 16 janvier 2012

I. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $a(x + a) = b(x + b)$ (E).

Il s'agit d'une **équation du premier degré en *x*, avec deux paramètres** (a et b).

On doit effectuer la résolution en discutant suivant les valeurs de a et b.

(E) est successivement équivalente à :
$a x + a^2 = bx + b^2$
$a x - bx = b^2 - a^2$
$(a - b)x = b^2 - a^2$

Discussion :

1^er cas : $a \neq b$

Dans ce cas, $a - b \neq 0$.

(E) est successivement équivalente à :

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a - b}$$
$$x = -\frac{a^2 - b^2}{a - b}$$
$$x = -\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}$$
$x = -(a + b)$

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{-(a + b)\}$.

2^e cas : $a = b$

Dans ce cas, $a - b = 0$.

(E) est successivement équivalente à :

$0x = 0$

Cette équation est toujours vérifiée.

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \mathbb{R}$.

II. On prend le côté du carré pour unité de longueur.
L'unité d'aire est égale à l'aire du carré pour unité d'aire.

1°)

L'aire du rectangle est égale à : $n(n + 1)$.

L'aire de la zone est égale à la somme $1 + 2 + \ldots + n$.
Elle est également égale à la moitié de l'aire du rectangle.
(On peut dire que le rectangle est « divisé » ou mieux est « partagé » de façon « équitable »).

Donc $\boxed{u_n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Il est inutile de prendre $n = 5$ comme dans l'exemple de la figure pour établir cette formule.

2°) Calculons la somme S de tous les entiers pairs compris entre 1 et 100 au sens large.

$S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$
$= 2 \times (1 + 2 + \ldots + 50)$
$= 2 \times \frac{50 \times (50+1)}{2}$
$= 50 \times (50 + 1)$
$= 50 \times 51$

On vérifie le résultat à l'aide la calculatrice, d'un logiciel de calcul formel (tel que XCas) ou à l'aide d'un tableur.

III.

1°) Calculons l'aire des carrés C_1, C_2, C_3.

- $u_1 = 1$ $\qquad$ $\mathcal{A}_{C_1} = 1^2 = 1$
- $u_2 = 1 + 2 = 3$ $\qquad$ $\mathcal{A}_{C_2} = 3^2 = 9$
- $u_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ $\qquad$ $\mathcal{A}_{C_3} = 6^2 = 36$

Les aires des carrés C_1, C_2, C_3 sont respectivement 1, 9, 36.

2°) a) Démontrons que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathcal{A}_{C_k} = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{C_k} &= (u_k)^2 \\
&= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

b) Déduisons-en que l'aire de la « bande » bleue délimitée par les carrés C_k et C_{k-1} est égale à k^3.

Notons z_k l'aire de la « bande » délimitée par les carrés C_k et C_{k-1} est égale à k^3.

$$\begin{aligned}
z_k &= \mathcal{A}_{C_k} - \mathcal{A}_{C_{k-1}} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} - \frac{(k-1)^2 k^2}{4} \\
&= \frac{k^2\left[(k+1)^2 - (k-1)^2\right]}{4} \\
&= \frac{k^2(k+1+k-1)(k+1-k+1)}{4} \\
&= \frac{k^2 \times 2k \times 2}{4} \\
&= k^3
\end{aligned}$$

3°) Démontrons que : $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1$^{\text{ère}}$ façon :

On a :

aire de C_n = aire de C_1
+ aire de la bande limitée par les carrés C_1 et C_2
+ aire de bande limitée par les carrés C_2 et C_3
+ …
+ aire de la bande limitée par les carrés C_{n-1} et C_n

Donc on en déduit la formule sommatoire :

$$\frac{n^2 \times (n+1)^2}{4} = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

2$^{\text{e}}$ façon :

On applique la méthode vue dans un précédent devoir sur la méthode de Pascal.

$z_1 = \cancel{\mathcal{A}_{C_1}}$ (on note z_1 l'aire du carré C_1)

$z_2 = \cancel{\mathcal{A}_{C_2}} - \cancel{\mathcal{A}_{C_1}}$

$z_3 = \cancel{\mathcal{A}_{C_3}} - \cancel{\mathcal{A}_{C_2}}$

….

$z_n = \mathcal{A}_{C_n} - \cancel{\mathcal{A}_{C_{n-1}}}$

En additionnant toutes ces égalités membre à membre, on obtient :

$\mathcal{A}_{C_n} = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$

Donc : $\dfrac{n^2 \times (n+1)^2}{4} = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

On vérifie ce résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Cette méthode est due au mathématicien arabe Al-Karagi (fin du X$^{\text{e}}$ siècle-début du XI$^{\text{e}}$ siècle).

Une histoire des mathématiques – Routes et Dédales, collection « Points Sciences ».
Livre de mathématiques 1$^{\text{ère}}$ S et E, Algèbre et analyse L.Corrieu, G. Lion, J.P. Roumilhac, J. Villatte.