$1^{\text{ère}}$ **S**

Exercices sur les angles orientés (2)

Dans tous les exercices, le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O et l'on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.
On note A, B, A', B' les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit M l'image de $-\dfrac{74\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

1°) Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

2°) Construire M au compas.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Même exercice que le $\boxed{\mathbf{1}}$ avec $-\dfrac{205\pi}{3}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Même exercice que le $\boxed{\mathbf{1}}$ avec $\dfrac{127\pi}{6}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Soit C l'image de $\dfrac{3\pi}{4}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.
Faire une figure en plaçant C.

1°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{CB'}$?

2°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{A'B'}$?

3°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{AB}$?

Raphaël Bion $1^{\text{ère}}$ S1 le 12-1-2016

Il faut d'abord voir l'intervalle avant de s'intéresser à l'arc.

Corrigé

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{3}$, on donne les mesures principales en fonction de π.

$\boxed{1}$

M est l'image de $-\dfrac{74\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique donc par définition on a : $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right) = -\dfrac{74\pi}{3}$.

M est l'image de *x* sur le cercle trigonométrique signifie que *x* est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

1°) **Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.**

On encadre – 74 (au numérateur) par deux multiples entiers de 3 (dénominateur).

$-3\times 25 \leqslant -74 \leqslant -3\times 24$

On va utiliser -3×24 car 24 est pair pour décomposer – 74.

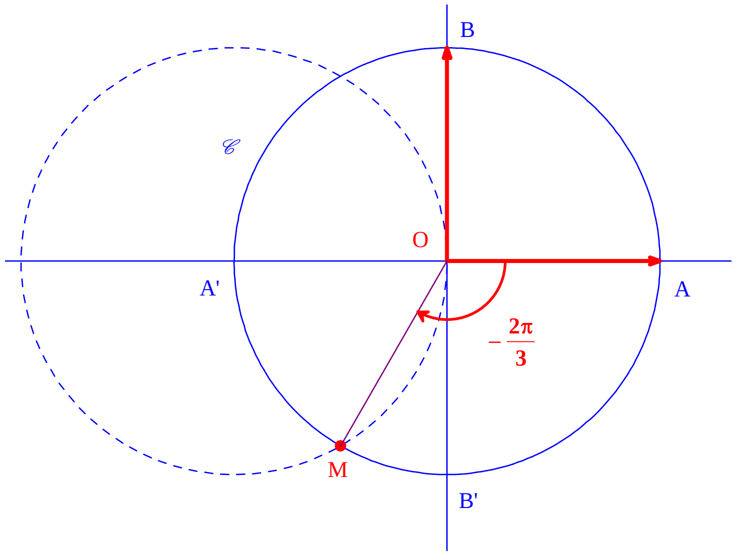
$$-\frac{74\pi}{3} = -\frac{72\pi + 2\pi}{3}$$
$$-\frac{74\pi}{3} = -24\pi - \frac{2\pi}{3}$$
$$-\frac{74\pi}{3} = -12\times 2\pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{2\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right] \\ -12 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc **la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$**.

2°) **Construction du point M.**

La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est une valeur remarquable donc on va pouvoir construire le point M à la règle et au compas de manière très simple.



On commence par tracer un cercle trigonométrique (assez gros, par exemple, en prenant un rayon de 5 cm ; le rayon du cercle trigonométrique sera alors de 1 en prenant 5 cm pour unité de longueur).

On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point A'.
On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$.
(Il est inutile de refaire toutes les marques de compas à partir du point A).

Sur la figure, on ne trace pas le tout le cercle de centre A' et de rayon 1.
On se contente seulement d'un petit arc de cercle qui permet d'obtenir le point M.

N.B. :

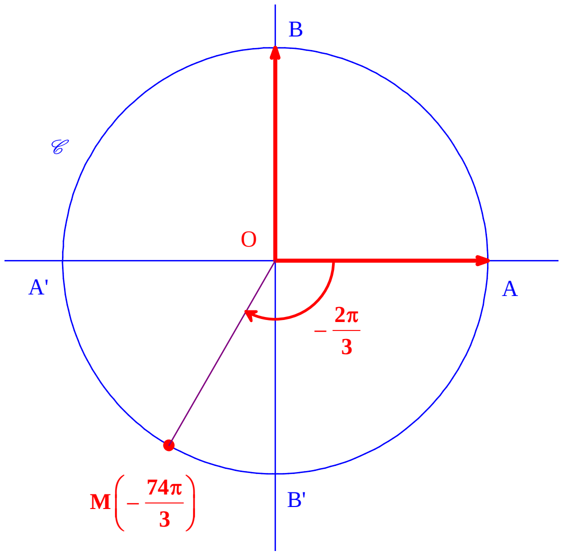
Il y a d'autres méthodes pour obtenir le point M :

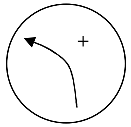
- en plusieurs coups de compas ;

- en traçant la médiatrice du segment [O A'] (en prenant la « moitié » de [O A']).

Sur la figure, on marque l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ (même notation qu'un angle normal sauf que l'on met une flèche) et l'on écrit $-\dfrac{2\pi}{3}$.

On écrit $M\left(-\dfrac{74\pi}{3}\right)$.





$\boxed{2}$

M l'image de $-\frac{205\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=-\frac{205\pi}{3}$.

1°) **Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.**

On encadre – 205 (au numérateur) par deux multiples entiers de 3 (dénominateur).

$-207 \leqslant -205 \leqslant -204$

$-3\times 69 \leqslant -205 \leqslant -3\times 68$

On va utiliser -3×68 car 68 est pair pour décomposer – 205.

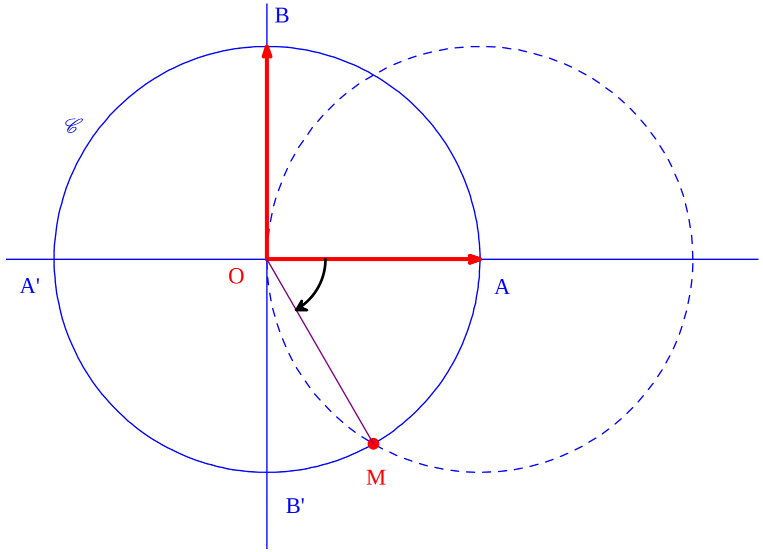
$$\begin{aligned}-\frac{205\pi}{3} &= -\frac{204\pi+\pi}{3}\\ &= -68\pi-\frac{\pi}{3}\\ &= -34\times 2\pi-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

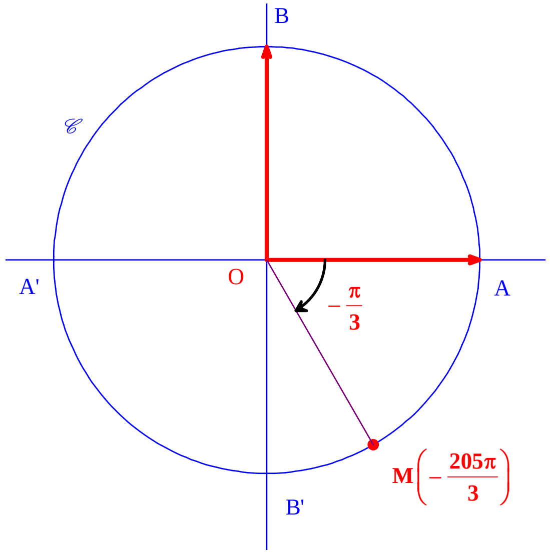
$$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]\\ -34\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

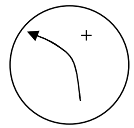
Donc **la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\frac{\pi}{3}$**.

2°) **Construction du point M**

On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point A. On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{AB'}$.







$\boxed{3}$

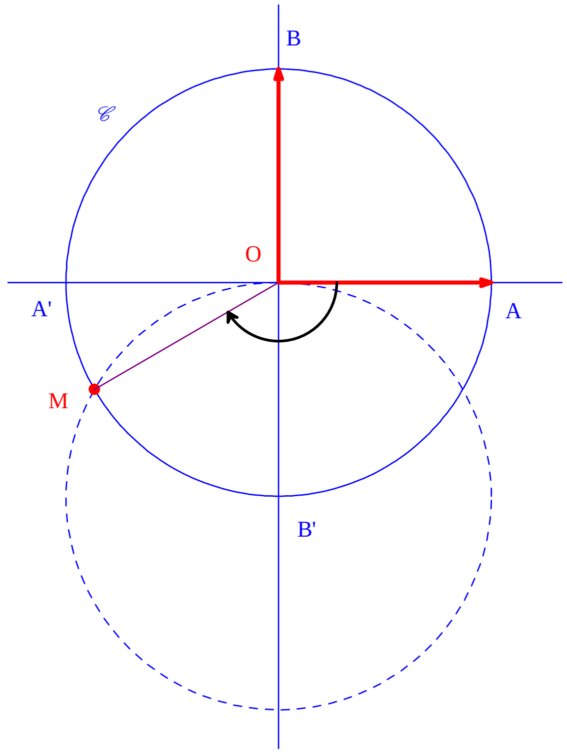
M l'image de $\dfrac{127\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\dfrac{127\pi}{6}$.

1°) **Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.**

$6\times 21<127<6\times 22$

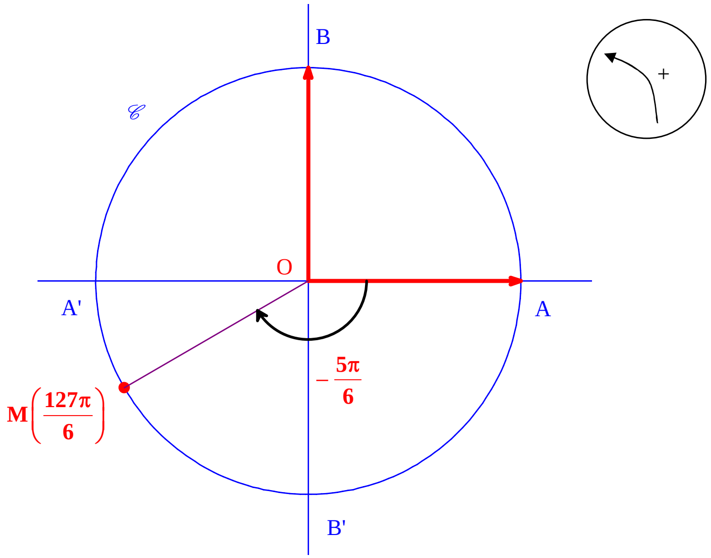
$$\frac{127\pi}{6}=\frac{6\times 22\pi-5\pi}{6}=22\pi-\frac{5\pi}{6}$$

Donc **la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\dfrac{5\pi}{6}$.**



2°) **Construction du point M**

On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point B'.
On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$.
N.B. :
Il y a d'autres méthodes pour obtenir le point M :
- en plusieurs coups de compas ;
- en traçant la médiatrice du segment $[OB']$;
- en traçant un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ puis en effectuant une construction de bissectrice.



$\boxed{4}$

C : image de $\dfrac{3\pi}{4}$ sur le cercle $\mathscr{C}$

On fait une figure dans chaque cas (donc trois figures).

1°) **Déterminons l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{CB'}$.**

Il s'agit d'un petit arc.

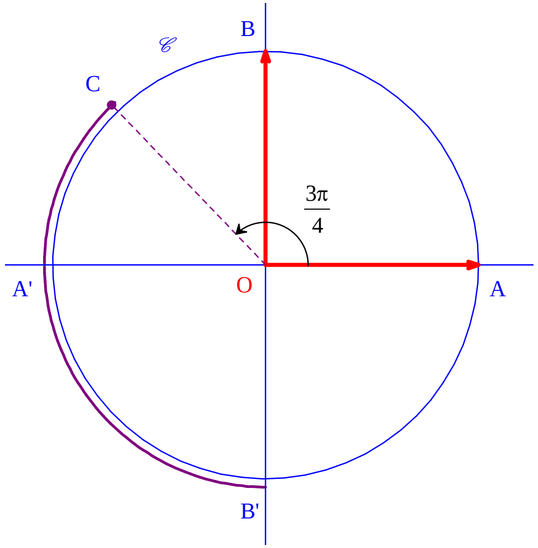
On part de A' ; on fait un tout complet dans le sens trigonométrique jusqu'à se retrouver en A'.

Notre parcours se « divise » en 2 :

petit arc $\overset{\frown}{A'B'}$ $\longrightarrow$ $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$

petit arc $\overset{\frown}{CA'}$ $\longrightarrow$ $\left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\pi\right]$

L'ensemble des valeurs est : $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\pi\right]$.



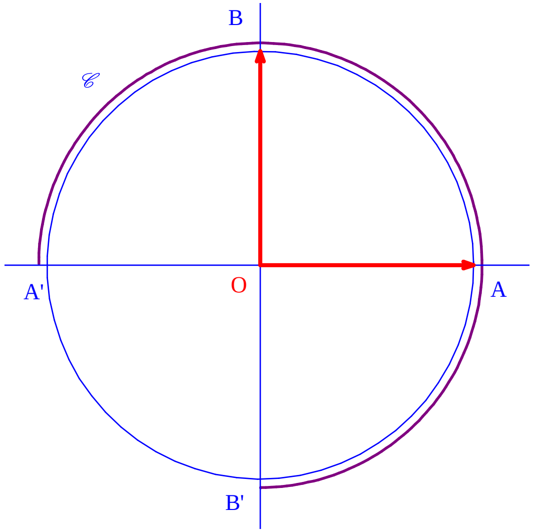
2°) **Déterminons l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{A'B'}$.**

Il s'agit d'un grand arc.

On va de B' à A' en tournant dans le sens trigonométrique.

On parcourt un grand arc.

L'ensemble des valeurs est $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]\cup\{-\pi\}$ (ou $\{-\pi\}\cup\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$).



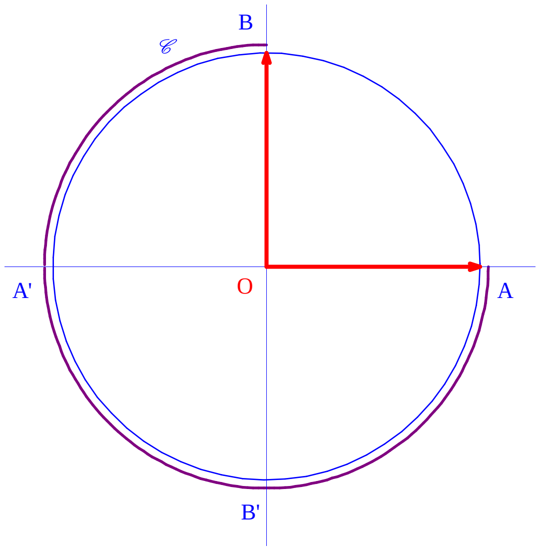
3°) **Déterminons l'ensemble des réels x de l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{AB}$.**

Il s'agit d'un grand arc.

On va de B à A en tournant dans le sens trigonométrique.

On parcourt un grand arc.

L'ensemble des valeurs est : $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]\cup\{0\}$ (ou $\{0\}\cup\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$).



Dans les question 2°) et 3°), l’ensemble isolé entre accolades peut être mis avant ou après l’intervalle.

1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les angles orientés (2)

Dans tous les exercices, le plan orienté *P* est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O et l'on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.
On note A, B, A', B' les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).

$\boxed{\textbf{1}}$ Soit M l'image de $-\dfrac{74\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

1°) Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

2°) Construire M au compas.

$\boxed{\textbf{2}}$ Même exercice que le $\boxed{\textbf{1}}$ avec $-\dfrac{205\pi}{3}$.

$\boxed{\textbf{3}}$ Même exercice que le $\boxed{\textbf{1}}$ avec $\dfrac{127\pi}{6}$.

$\boxed{\textbf{4}}$ Soit C l'image de $\dfrac{3\pi}{4}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.
Faire une figure en plaçant C.

1°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $\left[-\pi\,;\pi\right]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{CB'}$?

2°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $\left[-\pi\,;\pi\right]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{A'B'}$?

3°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $\left[0\,;2\pi\right]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{AB}$?

Raphaël Bion 1$^{\text{ère}}$ S1 le 12-1-2016

Il faut d'abord voir l'intervalle avant de s'intéresser à l'arc.

Corrigé

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{3}$, on donne les mesures principales en fonction de π.

$\boxed{1}$

M est l'image de $-\dfrac{74\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique donc par définition on a : $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=-\dfrac{74\pi}{3}$.

M est l'image de *x* sur le cercle trigonométrique signifie que *x* est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

1°) **Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.**

On encadre – 74 (au numérateur) par deux multiples entiers de 3 (dénominateur).

$-3\times 25 \leqslant -74 \leqslant -3\times 24$

On va utiliser -3×24 car 24 est pair pour décomposer – 74.

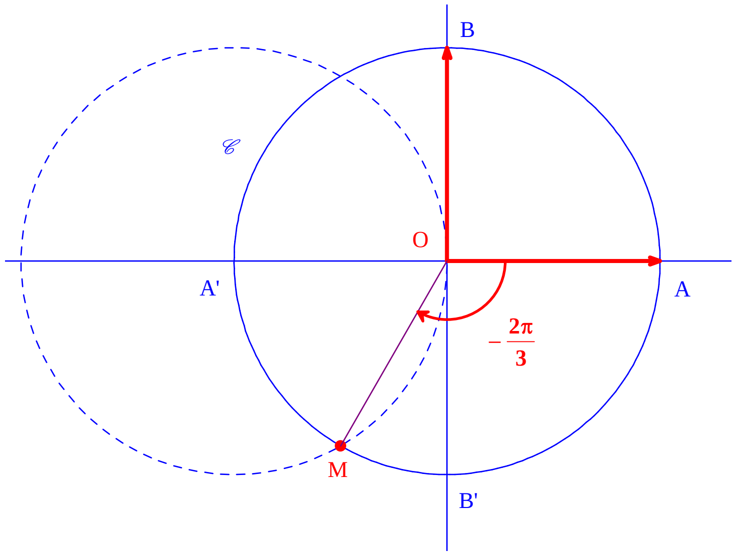
$$-\frac{74\pi}{3}=-\frac{72\pi+2\pi}{3}$$
$$-\frac{74\pi}{3}=-24\pi-\frac{2\pi}{3}$$
$$-\frac{74\pi}{3}=-12\times 2\pi-\frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]\\ -12\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc **la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$**.

2°) **Construction du point M.**

La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est une valeur remarquable donc on va pouvoir construire le point M à la règle et au compas de manière très simple.



On commence par tracer un cercle trigonométrique (assez gros, par exemple, en prenant un rayon de 5 cm ; le rayon du cercle trigonométrique sera alors de 1 en prenant 5 cm pour unité de longueur).

On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point A'.
On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$.
(Il est inutile de refaire toutes les marques de compas à partir du point A).

Sur la figure, on ne trace pas le tout le cercle de centre A' et de rayon 1.
On se contente seulement d'un petit arc de cercle qui permet d'obtenir le point M.

N.B. :

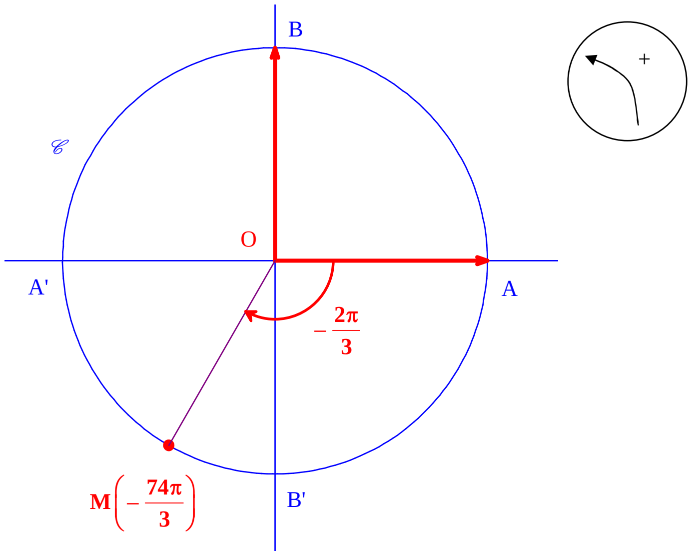
Il y a d'autres méthodes pour obtenir le point M :

- en plusieurs coups de compas ;

- en traçant la médiatrice du segment [O A'] (en prenant la « moitié » de [O A']).

Sur la figure, on marque l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ (même notation qu'un angle normal sauf que l'on met une flèche) et l'on écrit $-\dfrac{2\pi}{3}$.

On écrit $M\left(-\dfrac{74\pi}{3}\right)$.



$\boxed{2}$

M l'image de $-\frac{205\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=-\frac{205\pi}{3}$.

1°) **Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.**

On encadre – 205 (au numérateur) par deux multiples entiers de 3 (dénominateur).

$-207\leqslant-205\leqslant-204$

$-3\times69\leqslant-205\leqslant-3\times68$

On va utiliser -3×68 car 68 est pair pour décomposer – 205.

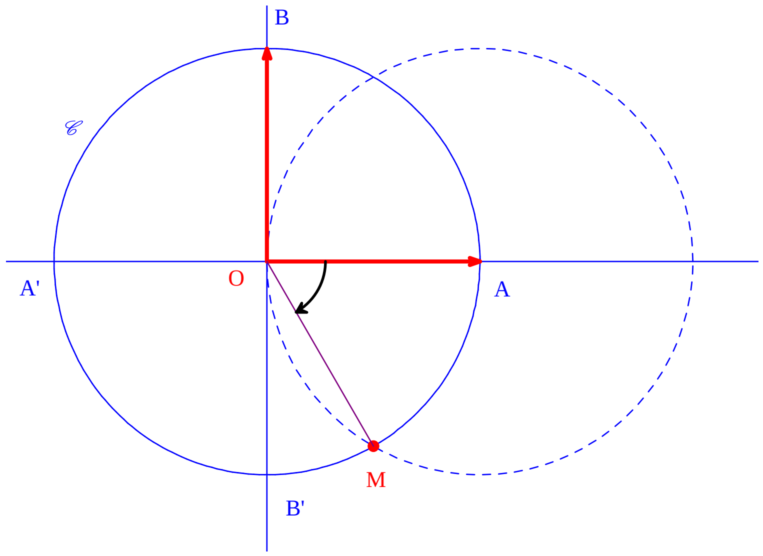
$$\begin{aligned}-\frac{205\pi}{3}&=-\frac{204\pi+\pi}{3}\\&=-68\pi-\frac{\pi}{3}\\&=-34\times2\pi-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

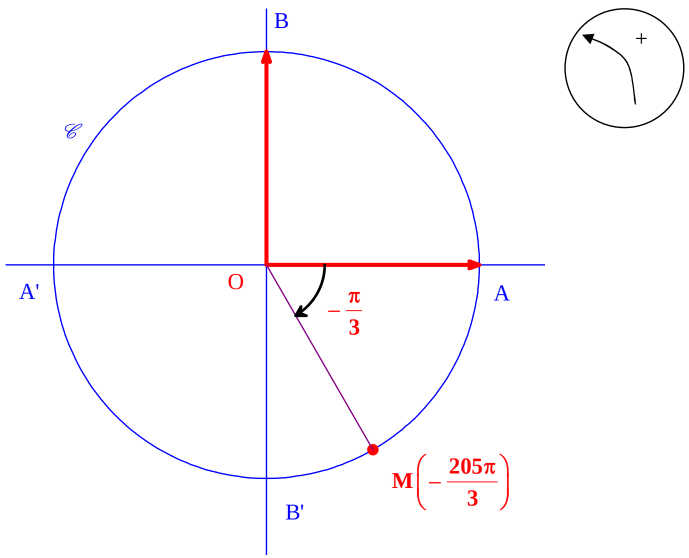
$$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]\\-34\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc **la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\frac{\pi}{3}$**.

2°) **Construction du point M**

On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point A. On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{AB'}$.





$\boxed{3}$

M l'image de $\dfrac{127\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\dfrac{127\pi}{6}$.

1°) **Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.**

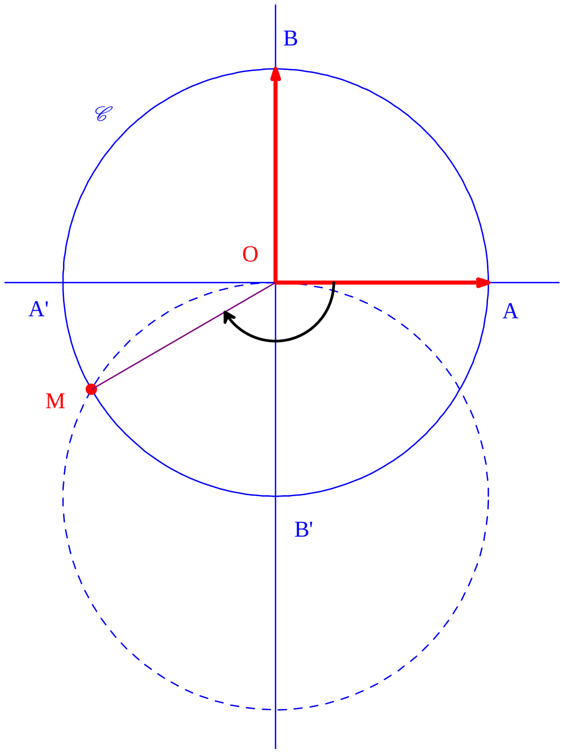
$6\times 21 < 127 < 6\times 22$

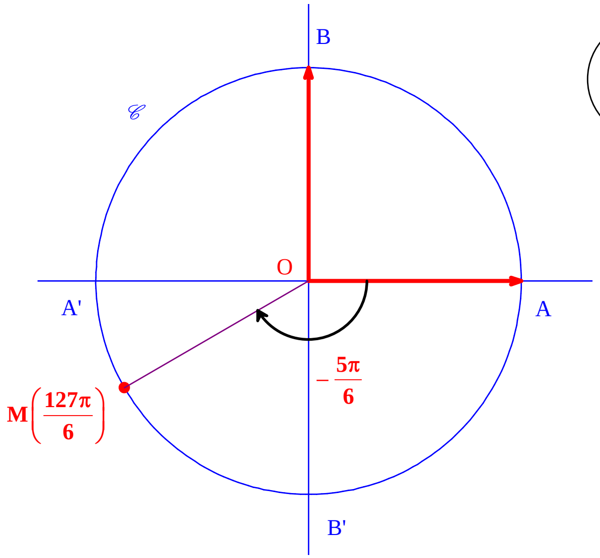
$$\frac{127\pi}{6}=\frac{6\times 22\pi-5\pi}{6}=22\pi-\frac{5\pi}{6}$$

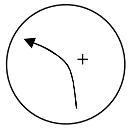
Donc **la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\dfrac{5\pi}{6}$.**

2°) **Construction du point M**

On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point B'.
On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$.
N.B. :
Il y a d'autres méthodes pour obtenir le point M :
- en plusieurs coups de compas ;
- en traçant la médiatrice du segment $[OB']$;
- en traçant un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ puis en effectuant une construction de bissectrice.







$\boxed{4}$

C : image de $\dfrac{3\pi}{4}$ sur le cercle $\mathscr{C}$

On fait une figure dans chaque cas (donc trois figures).

1°) **Déterminons l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{CB'}$.**

Il s'agit d'un petit arc.

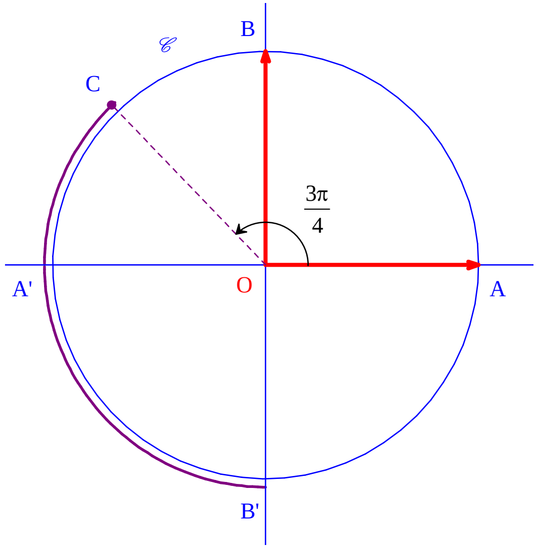
On part de A' ; on fait un tout complet dans le sens trigonométrique jusqu'à se retrouver en A'.

Notre parcours se « divise » en 2 :

petit arc $\overset{\frown}{A'B'}$ $\longrightarrow$ $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$

petit arc $\overset{\frown}{CA'}$ $\longrightarrow$ $\left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$

L'ensemble des valeurs est : $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$.



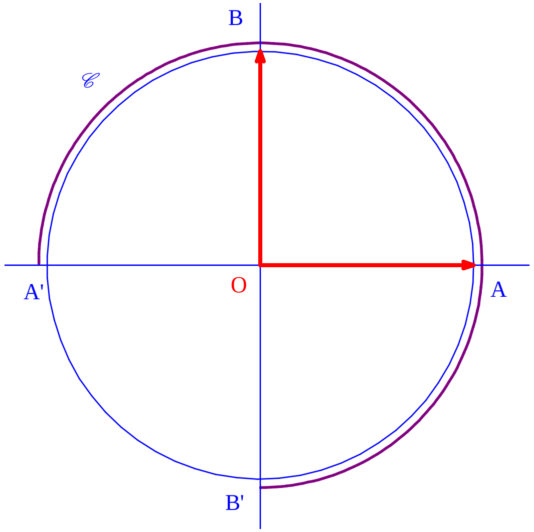
2°) **Déterminons l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{A'B'}$.**

Il s'agit d'un grand arc.

On va de B' à A' en tournant dans le sens trigonométrique.

On parcourt un grand arc.

L'ensemble des valeurs est $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]\cup\{-\pi\}$ (ou $\{-\pi\}\cup\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$).



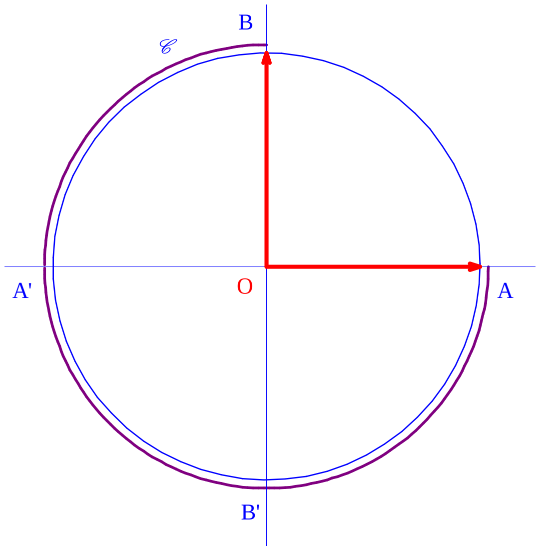
3°) **Déterminons l'ensemble des réels x de l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{AB}$.**

Il s'agit d'un grand arc.

On va de B à A en tournant dans le sens trigonométrique.

On parcourt un grand arc.

L'ensemble des valeurs est : $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;2\pi\right]\cup\{0\}$ (ou $\{0\}\cup\left[\dfrac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$).



Dans les question 2°) et 3°), l'ensemble isolé entre accolades peut être mis avant ou après l'intervalle.