1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le mercredi 4 janvier 2012

I. Formules sommatoires

Le but de cet exercice est d'étudier un procédé classique de simplification appelé simplification par « télescopage » ou « en cascade » afin d'établir des formules sommatoires.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = 1+2+...+n$ (ou $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k$).

1°) On considère le polynôme $P(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$.

Vérifier que, pour tout réel x, on a : $P(x+1) - P(x) = x$.

2°) On écrit l'égalité $P(x+1) - P(x) = x$ pour $x \in \{1, 2, ..., n\}$ (l'entier naturel $n \geqslant 1$ étant fixé) et on fait la somme membre à membre comme dans le cadre ci-dessous (les signes « = » bien en dessous les uns des autres).

$$\boxed{\begin{array}{c} P(2) - P(1) = 1 \\ P(3) - P(2) = 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(n) - P(n-1) = n-1 \\ P(n+1) - P(n) = n \end{array}}$$

Recopier ce cadre, tirer un trait en dessous et barrer en diagonale les termes qui s'annulent dans les membres de gauche.
En déduire une expression de S_n en fonction de n.

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose : $S'_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ (ou $S'_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$).

Reprendre la démarche de la partie A, en considérant le polynôme $Q(x) = \dfrac{x(x-1)(2x-1)}{6}$ afin de donner une expression simplifiée de S'_n en fonction de n.

Partie C

Déterminer une démarche analogue à celle des parties précédentes pour établir une expression simplifiée de

$S'_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ (ou $S''_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$).

Pour les exercices II et III, on rappelle que le centre de gravité G d'un triangle ABC est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Aucune figure n'est demandée sur la copie pour ces exercices.

II. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère trois points $A(x_A\,;\,y_A)$, $B(x_B\,;\,y_B)$ et $C(x_C\,;\,y_C)$.
On note G le centre de gravité du triangle ABC.

Exprimer les coordonnées de G en fonction des coordonnées de A, B, C.

III.

Partie A

Soit ABC et A'B'C' deux triangles quelconques.
On note G et G' leurs centres de gravité respectifs.
1°) Exprimer $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ en fonction de $\overrightarrow{GG'}$
2°) En déduire que les triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité si et seulement si $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Partie B **Application**

Soit EFG un triangle quelconque et λ un réel quelconque.
On note M, N, P les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{EM} = \lambda\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FN} = \lambda\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{GP} = \lambda\overrightarrow{GE}$.

Démontrer que les triangles EFG et MNP ont le même centre de gravité.

IV. On donne la table des premiers carrés d'entiers.

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	9	16	25	36

1°) On souhaite encadrer $\sqrt{6}$ par deux entiers consécutifs.
Un élève a proposé la solution suivante :

> 6 est entre les carrés 4 et 9.
> 4 < 6 < 9
> Donc 2 < $\sqrt{6}$ < 3.

Analyser et expliquer la démarche de cet élève.

2°) Encadrer entre deux entiers consécutifs les nombres suivants : $\sqrt{13}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{130}$.

Conseils

Ne rien écrire sur l'énoncé.

I.

Les sommes considérées dans tout le devoir ont déjà été rencontrées dans le devoir pour le 2 décembre 2011.

La somme de la partie A a déjà été rencontrée dans la narration de recherche sur les segments.

Écrire le cadre en haut de la 2e page de la copie (pour avoir la place de montrer les calculs qui vont suivre).

2°) **Écrire le cadre en haut de la 3e page de la copie.**

Bien suivre l'énoncé (sans se laisser perturber par le fait que l'on veut calculer la somme des carrés).

Écrire au moins les deux premières lignes (pour $k = 1$ et $k = 2$). Mettre des petits points.
Écrire la dernière égalité pour $k = n$.

$$(1+1)^3 = \ldots$$
$$(2+1)^3 = \ldots$$
$$\ldots$$
$$(n+1)^3 = \ldots$$

On peut éventuellement utiliser des **outils de calcul formel**.

Il existe une commande permettant de donner une formule explicite pour une telle somme.