Le paradoxe des anniversaires

1. On considère quatre personnes.

On cherche la probabilité pour qu'au moins deux personnes des quatre personnes soient nées le même jour (nous parlons d'une année non bissextile).

A : « Au moins deux personnes sont nées le même jour »

$\bar{A}$: « Toutes les personnes ne sont pas nées le même jour »

$$P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{365 \times 364 \times 363 \times 362}{365^4} = 0{,}01635\ldots$$

2. On considère trente personnes.

On cherche la probabilité pour qu'au moins deux personnes des trente personnes soient nées le même jour.

$$P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times 336}{365^{30}}$$

Ce calcul est impossible à la calculatrice (dépassement de capacités).

On va effectuer une réécriture pour nous permettre de faire le calcul à l'aide d'un algorithme.

$$P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \ldots \times \frac{336}{365}$$

On va rédiger un algorithme qui permet de calculer cette probabilité (retenir le principe de calcul d'un produit qui « grossit » de plus en plus).

Variables :
i, p, q : entiers naturels

Initialisation :

q prend la valeur de 1

Traitement :

Pour i allant de 1 à 30 **Faire**

  q prend la valeur $q \times \dfrac{365 - i + 1}{365}$

Fin pour
p prend la valeur $1 - q$

Sortie :
Afficher p

En programmant cet algorithme sur calculatrice, on obtient P (A) = 0,706316243…

On voit que cette probabilité est assez élevée, ce qui est assez surprenant.

3. Généralisation

On considère n personnes.

On cherche la probabilité $p(n)$ pour qu'au moins deux personnes soient nées le même jour.

On a la même formule qu'auparavant.
On rédige un algorithme identique au précédent.

Résultats pour les valeurs de *n*

n	$p(n)$
5	2,71 %
10	11,69 %
15	25,29 %
20	41,14 %
25	56,87 %
30	70,63 %
40	89,12 %
50	97,04 %
60	99,41 %
80	99,99 %
100	99,99997 %
200	99,9999999999999999999999999998 %
300	$\left(1-\left(7\times10^{-73}\right)\right)\times 100$ %
350	$\left(1-\left(3\times10^{-131}\right)\right)\times 100$ %
> 365	100 % (par le principe des tiroirs) *

* Le **principe des tiroirs** ou **principe de Dirichlet** s'énonce ainsi :

« Si on dispose plus de k + 1 objets parmi k tiroirs, alors un tiroir contient au moins deux objets. »

« Si on doit ranger des chaussettes dans des tiroirs et que le nombre de chaussettes est supérieur au nombre de tiroirs, alors un tiroir contient au moins deux chaussettes ».

Il est évident que pour $n > 365$, au moins deux personnes sont nées le même jour.
Donc $n > 365$, $p(n) = 100$ %.

4. Conclusion

Citation extraite de l’article de Wikipedia sur le paradoxe des anniversaires :

« Le paradoxe des anniversaires, dû à Richard von Mises, est à l'origine une estimation probabiliste du nombre de personnes que l'on doit réunir pour avoir une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l'année. Il se trouve que ce nombre est 23, ce qui choque un peu l'intuition. À partir d'un groupe de 57 personnes, la probabilité est supérieure à 99 %.

Cependant, il ne s'agit pas d'un paradoxe dans le sens de contradiction logique ; c'est un paradoxe, dans le sens où c'est une vérité mathématique qui contredit l'intuition : la plupart des gens estiment que cette probabilité est très inférieure à 50 %. »