Narration avec la recherche sur les boules dans l'eau

Sujet

Dans un récipient de forme cylindrique de rayon 4 dm, on place une première boule en plomb B_1 de rayon 2 dm (qui ne flotte pas).
On verse ensuite de l'eau jusqu'à recouvrir exactement cette boule : on dit que la surface de l'eau est tangente à la boule.
On retire la boule B_1 sans modifier le volume d'eau.
On la remplace par une autre boule B_2 en plomb de rayon *r* (*r* est exprimé en dm ; *r* appartenant à]0, 4]), différent de celui de la boule B_1.
On s'aperçoit que le niveau de l'eau est encore tangent à la boule.

Trouver la valeur de r qui permet ce miracle...

À la fin de la narration, faites une conclusion en disant si vous avez aimé cette recherche et pourquoi (notamment ce que cette recherche vous a apporté).

Compte rendu

On commence par faire le schéma du dispositif.

On peut faire l'expérience avec un récipient, des boules…

On voit qu'il va falloir calculer des **volumes**.

En lisant le sujet, on constate que le volume d'eau est une constante dans le problème.

Il est essentiel de le calculer pour mettre en lien les volumes des deux boules.

Commentaire

On cherche les formules donnant le volume d'un cylindre et le volume d'une boule (c'est l'un des intérêts de ce travail de recherche).

Certains élèves sont allés chercher le traité d'Archimède « De la sphère et du cylindre » qui date environ de 225 avant Jésus-Christ.
Point n'était besoin d'aller chercher d'aussi vieux ouvrages mais cela avait l'intérêt d'apporter aux élèves concernés des informations d'histoire des mathématiques très intéressantes.

I. On commence par regarder ce qui se passe avec la boule B_1

• Volume de la boule de la boule B_1 de rayon 2 dm :

$\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32}{3}\pi$ (valeur exacte)

• Volume du cylindre contenant la boule B_1 et l'eau : $\pi\times 4\times 4^2 = 64\pi$

Commentaire

On va laisser autant que possible les valeurs exactes des résultats.
On utilisera des valeurs approchées le plus tard possible, si on ne peut pas faire autrement.

On peut ainsi calculer le volume V d'eau qui a été versé de telle sorte que la surface soit tangente à la boule.

$$64\pi-\frac{32\pi}{3}=\frac{160\pi}{3}$$

II. On passe à la boule B_2 de rayon *r*

• Volume de la boule de la boule B_2 de rayon r dm :

$\frac{4}{3}\pi \times r^3$ (valeur exacte)

• Volume du cylindre contenant la boule B_2 et l'eau : $32\pi\, r$

III. On met en relation les deux.

$$32\pi r = \frac{160}{3}\pi + \frac{4\pi}{3}r^3 \quad (1)$$

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$$\frac{160}{3}\pi + \frac{4\pi}{3}r^3 - 32\pi r = 0$$

$r^3 - 24r + 40 = 0$ (1') (équation obtenue en multipliant les deux membres par $\frac{3}{4\pi}$)

Commentaire

On essaie toujours de simplifier les équations au maximum.

IV. Résolution ; fin de la recherche

L'équation (1') est une équation du troisième degré.

On ne sait pas en général résoudre une telle équation (il n'y a pas de règle dans le cours).

Commentaire

Beaucoup d'élèves ont reconnu leur impuissance face à la résolution d'une équation du troisième degré mais n'ont pas cherché à aller plus loin.

On pouvait s'orienter dans diverses directions :

- résolution approchée
- résolution exacte

Pour la résolution approchée comme pour la résolution exacte, on pouvait recourir aux calculatrices ou à des outils de calcul formel (logiciel de calcul formel qui permettent une résolution exacte quand c'est possible).

1°) Résolution approchée

On définit la fonction $f : x \mapsto \ x^3 - 24x + 40$.

On trace sa courbe représentative sur l'écran d'une calculatrice graphique.
On observe trois racines : une négative (égale environ égale à – 5,6, deux positives dont la valeur 2 ce qui est logique et environ 3, 6).

Commentaire

Il était intéressant de donner l'allure de la courbe sur la copie ou de joindre la courbe obtenue à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe (par exemple, Geogebra).

On s'intéresse à la solution positive autre que 2.
On utilise la commande spéciale permettant de déterminer les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses (c'est-à-dire les racines ou les zéros du polynôme).
On obtient x = 3,5825757 (c'est en fait un « environ égal » qu'il faudrait écrire, mais la calculatrice ignore ce genre de subtilité).

Avoir un regard critique sur les résultats obtenus à l'aide d'une calculatrice.

On obtient une valeur approchée de la valeur de r.

Pour obtenir une valeur approchée plus précise, on peut utiliser l'application solveur de la calculatrice située dans $\boxed{\text{Math}}$.

On trouve ainsi une valeur beaucoup plus précise :

x = 3,5825756949558

Quoi qu'il en soit, on ne pourra avec cette méthode obtenir qu'une valeur approchée de la solution cherchée.

Variante : résolution par essais et erreurs

2°) Résolution exacte

a) Utilisation d'un logiciel de calcul formel

Immédiat mais personne n'y a pensé ce qui est vraiment dommage.

b) Résolution « à la main »

Les élèves n'avaient pas les connaissances pour y arriver.
Il fallait se débrouiller en se creusant la tête ou en regardant dans des ouvrages de mathématiques ce qui n'est pas interdit.

Cette voie plus difficile a néanmoins été explorée avec succès par quelques (rares) élèves.

On essaie de factoriser $x^3 - 24x + 40$ en utilisant la racine évidente 2.

$$\begin{aligned} x^3 - 24x + 40 &= (x-2)(x^2 + bx + c) \\ &= x^3 + bx^2 + cx - 2x^2 - 2bx - 2c \\ &= x^3 + (b-2)x^2 + (c-2b)x - 2c \end{aligned}$$

Par identification, $\begin{cases} b - 2 = 0 \\ c - 2b = -24 \\ -2c = 40 \end{cases}$ car il n'y a pas de carré dans l'expression de départ

D'où $\begin{cases} b = 2 \\ c = -20 \end{cases}$.

Ainsi : $x^3 - 24x + 40 = (x-2)(x^2 + 2x - 20)$ (on vérifie d'ailleurs en redéveloppant le second membre que cette factorisation est juste)

On a factorisé le polynôme du troisième degré $x^3 - 24x + 40$ en produit d'un polynôme du premier degré par un polynôme du second degré.

On cherche les racines du polynôme du second degré.

Le discriminant est égal à 84 (il vaudrait mieux d'ailleurs utiliser le discriminant réduit).

On trouve deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = -1 + \sqrt{21}$ et $x_2 = -1 - \sqrt{21}$.

On pourrait à l'aide de ces racines donner une factorisation du polynôme du 3^e degré mais cela n'aurait pas vraiment d'intérêt par rapport à la suite de la recherche.

Or le rayon de la boule B_2 est strictement positif donc la valeur cherchée est $\sqrt{21} - 1$.

En calculant une valeur approchée, on retrouve la valeur trouvée avec la méthode de résolution approchée (qui était environ égale à 3,6).

Avis des élèves sur cette narration de recherche :

Les avis sur cette narration de recherche ont été variés : certains élèves ont aimé, d'autres non.

Quentin Naudan ; Jean-Baptiste Vergnes :

« Cette narration de recherche a été très intéressante pour nous deux car nous avons travaillé sur le troisième degré et nos résultats prouvent que nous ne nous sommes pas trompé ».

Compétences mises en jeu :

- calculs de volumes de solides usuels (d'où la nécessité de revoir les formules de volumes du collège)

- résoudre une équation polynomiale du 3^{e} degré en explorant toutes les méthodes possibles

- avoir un regard critique sur les résultats obtenus

Compétence transversale :

Communiquer sa démarche, ses questions, ses doutes, ses retours en arrière, par écrit en texte et en images.

Employer le bon vocabulaire mathématique (ne pas confondre équation, expression, fonction…).

Savoir définir correctement une fonction.