1ère S

Exercices sur sens de variation des fonctions dérivables

Étude des variations de fonctions polynômes

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{4}$, calculer $f'(x)$.

Dresser le tableau de variation de f ; on tracera les flèches à la règle.
Calculer les extremums locaux éventuels et compléter le tableau de variation.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.
Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

$\boxed{1}$ $f(x) = -2x^3 + 6x - 3$ (factoriser $f'(x)$)

$\boxed{2}$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ (factoriser $f'(x)$)

$\boxed{3}$ $f(x) = x^3 + x - 1$

$\boxed{4}$ $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 2$

Étude des variations de fonctions rationnelles

Dans les exercices $\boxed{5}$ à $\boxed{12}$, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, déterminer sur quel ensemble f est dérivable et calculer $f'(x)$.

Dresser le tableau de variation de f ; on tracera les flèches à la règle.
On n'oubliera pas de mettre des doubles barres sur la ligne intitulée « Signe de $f'(x)$ » et sur la ligne « Variations de f » lorsque la fonction n'est pas définie.
Attention, pour tracer une double barre, on utilise la règle pour tracer un trait continu entre la ligne intitulée « Signe de $f'(x)$ » et la ligne « Variations de f ».
Calculer les extremums éventuels et compléter le tableau de variations.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.
Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ (déterminer d'abord le domaine de définition de f)

$\boxed{6}$ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (factoriser le numérateur de $f'(x)$; ne pas oublier les doubles barres)

$\boxed{7}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$\boxed{8}$ $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x+3}$

$\boxed{9}$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$

$\boxed{10}$ $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\boxed{11}$ $f(x) = \dfrac{3}{x^2+2x}$

$\boxed{12}$ $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

$\boxed{13}$ **Étude d'une fonction polynôme du troisième degré**

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 centimètre ou 1 « gros » carreau).

1°) Calculer $f'(x)$ en factorisant le résultat et faire le tableau de variations de f. Calculer les extremums locaux.
Faire des phrases expliquant les variations.

2°) Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

3°) Sur un graphique, tracer le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ en respectant l'unité indiquée au début de l'exercice.
Placer les points du tableau précédent.
Mettre des pointillés et les valeurs sur les axes pour les points correspondant aux extremums locaux.
Tracer les tangentes horizontales en ces points. On rappelle que l'on représente usuellement une tangente par une double flèche.

4°) Tracer $\mathscr{C}$ en reliant les points précédents à la main en tenant compte du tableau de variations.
On soignera particulièrement l'allure de la courbe au voisinage des tangentes horizontales.
Contrôler sur la calculatrice graphique ou sur un logiciel de tracé de courbes tel que *Sinequanon*.

$\boxed{14}$ On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x^2}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.
(ou formulation équivalente :
Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.)

$\boxed{15}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2x+1}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Dresser le tableau de variations de f.
3°) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 4x$.

Les exercices $\boxed{16}$ à $\boxed{19}$ ne sont pas à faire.

Dans chacun des exercices $\boxed{16}$ à $\boxed{19}$, on donne une fonction f et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\boxed{16}$ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-2\,;-1)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{17}$ $f(x)=x^3+3x^2$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-1\,;2)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{18}$ $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(1\,;3)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{19}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie ; on suppose que le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est **orthogonal**.

$\boxed{20}$ Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f*.

Faire le tableau de variations de *f* ; en déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ pour $x\in\mathrm{I}$, I étant un intervalle précisé dans chaque cas.

Principe :

- On détermine le minimum m et le maximum M de f sur l'intervalle I proposé dans chaque cas.
- On peut alors écrire l'encadrement de $m\leqslant f(x)\leqslant M$ pour tout $x\in I$. C'est le meilleur encadrement possible de $f(x)$ pour $x\in\mathrm{I}$.

1°) $f : x \mapsto -x^3-2x^2+4x+3$; $\mathrm{I}=[-3\,;1]$.

2°) $f : x \mapsto 2x^3-9x^2+12x+1$; $\mathrm{I}=[0\,;6]$.

3°) $f : x \mapsto \dfrac{9}{x}+x-1$; $\mathrm{I}=[1\,;4]$.

4°) $f : x \mapsto \dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}$; $\mathrm{I}=[1\,;8]$.

$\boxed{21}$ Soit ABCDEFGH un cube d'arête 10.

Pour tout réel $x\in[0\,;10]$, on construit :

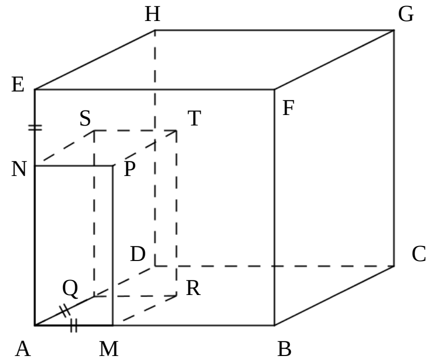
- le point M de [AB] tel que $\mathrm{AM}=x$;
- le point N de [AE] tel que $\mathrm{EN}=x$;
- le point Q de [AD] tel que $\mathrm{AQ}=x$;
- le parallélépipède AMRQNPTS.

On note $\mathrm{V}(x)$ le volume du parallélépipède AMRQNPTS.

Reproduire la figure.

1°) Exprimer $\mathrm{V}(x)$ en fonction de *x*.

2°) Déterminer pour quelle valeur de *x* le volume de AMRQNPTS est maximal.



$\boxed{22}$ L'unité de longueur est le décimètre.

On désire réaliser une boîte en papier qui a la forme d'un pavé droit sans couvercle. Pour cela, on dispose d'une feuille carrée de côté 6. En enlevant dans chaque « coin » un carré de côté *x* ($0<x<3$) et en effectuant des pliages, on peut réaliser une boîte sans couvercle à base carrée.

On note $\mathrm{V}(x)$ le volume de la boîte en dm^3.

Faire une figure du patron de la boîte (en deux dimensions).

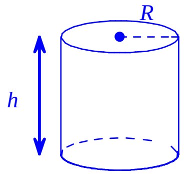
On peut éventuellement découper le patron en prenant 6 cm pour côté du carré (et non 6 dm !).

1°) Préciser les trois dimensions de la boîte puis exprimer $\mathrm{V}(x)$ en fonction de *x*.

2°) Pour quelle valeur de *x* le volume de la boîte est-il maximal ?

3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice les valeurs décimales approchées d'ordre 3 par défaut des réels *x* pour lesquels le volume de la boîte de 10 dm^3.

$\boxed{\textbf{23}}$ Une boîte de conserve a la forme d'un cylindre de révolution. Son volume est de 1 dm^3.



On note R le rayon de la base (en dm), h la hauteur (en dm) et S l'aire totale (en dm^2).
Reproduire la figure.
1°) Démontrer que $\pi R^2 h = 1$.
2°) Exprimer S en fonction de R.
Indication : On pourra réfléchir à partir du patron de la boîte de conserve.
3°) Déterminer R pour que S soit minimale. Démontrer qu'alors la hauteur est égale au diamètre.

Corrigé

Point-méthode valable pour tous les exercices :

Pour calculer les extremums, on utilise la « forme de base ».

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto -2x^3 + 6x - 3$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -6x^2 + 6$

$$= 6\left(1 - x^2\right)$$

$$= 6(1+x)(1-x)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de 6*		+		+		+	
Signe de $1+x$		–	0	+		+	
Signe de $1-x$		+		+	0	–	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de f		↘	-7	↗	1	↘	

On ne met que des + sur la première ligne car 6 est toujours positif « quoiqu'il » arrive.

** Ligne facultative car 6 est un nombre strictement positif.*

On calcule les extremums locaux de f en – 1 et en 1 :

$f(-1) = \ldots = -7$

$f(1) = \ldots = 1$

f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

La fonction f présente un minimum local en – 1 égal à – 7.

La fonction f présente un maximum local en 1 égal à 1.

Remarque : positionner les extremums au bout des flèches.

Vérifier avec une calculatrice graphique ou avec un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur.

$\boxed{2}$ $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$= 3x(x-2)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		–	0	+		+	
Signe de $x-2$		–		–	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	3	↘	-1	↗	

On calcule les extremums locaux en 0 et en 2.

$f(0) = 3$

$f(2) = 2^3 - 3\times 2^2 + 3 = 8 - 12 + 3 = -4 + 3 = -1$

Le tableau de variation fait apparaître deux extremums locaux.

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto x^3 + x - 1$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 + 1$

Cette expression ne s'annule jamais, elle est toujours strictement positive, donc dans la ligne « SGN de $f'(x)$ » du tableau récapitulatif, on ne met aucun 0.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
SGN de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$\nearrow$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f n'admet pas d'extremum.

Commentaires :

• Il y a un seul signe sur la ligne « SGN de $f'(x)$ ». Cela peut surprendre de prime abord.

• La courbe représentative de la fonction f n'admet ni début ni fin.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto -x^3 + x^2 + x - 2$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$

$f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 (racine évidente) et $-\dfrac{1}{3}$ (obtenue par produit).

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$-\dfrac{59}{27}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

$f(1) = -1^3 + 1^2 + 1 - 2 = -1$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{1+3-9-54}{27} = \frac{4-9-54}{27} = -\frac{59}{27}$$

Dans le tableau de variations, on ne met que des valeurs exactes.

f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;1\right]$.

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right]$ et sur $[1\,;+\infty[$ (ne pas dire sur la réunion des deux intervalles).

Attention, les deux intervalles sont fermés (il n'y a pas de « zone plate » pour la représentation graphique).

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme fonction rationnelle (ou même comme fonction homographique).

Fonction dont l'expression est du type $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=-2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \qquad f'(x) = \frac{1\times(x-2)-(x+1)\times 1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$$

La dérivée de f ne s'annule en aucun réel.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de -3		$-$		$-$	
Signe de $(x-2)^2$ *		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

* Un carré est toujours positif ou nul.

On met une double barre dans le tableau de variations au niveau de la valeur interdite.

f est strictement décroissante sur les intervalle $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

$\boxed{6}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ ou comme fonction rationnelle (à condition de mettre préalablement l'expression de f au même dénominateur, ce qui montre que f est bien une fonction rationnelle).

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

Seule cette écriture de la dérivée sous forme d'un quotient dont le numérateur est factorisé permet de bien étudier le signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
SGN de $x+1$		$-$	0^{num}	$+$	|	$+$	|	$+$	
SGN de $x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0^{num}	$+$	
SGN de x^2		$+$	|	$+$	$0^{\text{déno}}$	$+$	|	$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	||	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-2	$\searrow$	||	$\searrow$	2	$\nearrow$	

On a une double barre à partir du signe de $f'(x)$.

Il peut être choquant à première vue de trouver que le maximum de f sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ plus petit que le minimum de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Mais il ne faut pas oublier que ce sont des extremums locaux de f !

$\boxed{7}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad \begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(2x-2-x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
SGN de x		$-$	0^{num}	$+$	|	$+$	|	$+$	
SGN de $x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $(x-1)^2$		$+$	|	$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	|	$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	||	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	0	$\searrow$	||	$\searrow$	4	$\nearrow$	

$\boxed{8}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto x - 1 + \dfrac{4}{x+3}}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ comme fonction rationnelle.

On peut aussi écrire « f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ comme somme d'une fonction polynôme et d'une fonction homographique ».

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\} \quad f'(x) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right)$$
$$= \frac{(x+3)^2 - 4}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{(x+3)^2 - 2^2}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{[(x+3)+2][(x+3)-2]}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)^2}$$

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
SGN de $x+5$		$-$	0^{num}	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x+1$		$-$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $(x+3)^2$		$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-8	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\boxed{9}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f'(x) = \frac{(2x-3)\times(x+1) - (x^2-3x)\times 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$x^2 + 2x - 3$ est un polynôme du second degré qui admet pour racines 1 (racine évidente) et – 3 (obtenue par produit).

On peut aussi calculer le discriminant réduit (en posant $a = 1$, $b = 2$, $b' = 1$, $c = -3$).

$\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' = 4$

$\Delta' > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -3 \qquad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 1$$

Remarque : Pour Δ', le prime ne veut pas dire que l'on fait le discriminant de f' ! Il signifie « discriminant réduit ».

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
SGN de x^2+2x-3		$+$	0^{num}	$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $(x+1)^2$		$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-9	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty\,;-3]$ et $[1\,;+\infty[$.

f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3\,;-1[$ et $]-1\,;1]$.

$\boxed{10}$ $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{2\times(x^2+1) - 2x\times(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $1+x$		$-$	0^{num}	$+$		$+$	
SGN de $1-x$		$+$		$+$	0^{num}	$-$	
SGN de $\left(x^2+1\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$-$	0^{num}	$+$	0^{num}	$-$	
Variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

$f(1)=\dfrac{2\times 1}{1^2+1}=1$

$f(-1)=\dfrac{2\times(-1)}{(-1)^2+1}=-1$

$\boxed{11}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+2x}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+2x\neq 0$

si et seulement si $x(x+2)\neq 0$

si et seulement si $x\neq 0$ et $x+2\neq 0$

si et seulement si $x\neq 0$ et $x\neq -2$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{0\,;-2\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\,;-2\}$ comme fonction rationnelle (en effet, la fonction $x\mapsto 3$ est une fonction polynôme car c'est une fonction constante).

Pour calculer la dérivée, on effectue une réécriture de $f(x)$.

On écrit $f(x)=3\times\dfrac{1}{x^2+2x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\,;-2\}\quad f'(x)=3\times\left[-\dfrac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}\right]$

$$=-\frac{6(x+1)}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
SGN de -6		$-$		$-$		$-$		$-$	
SGN de $x+1$		$-$		$-$	0^{num}	$+$		$+$	
SGN de $\left(x^2+2x\right)^2$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0^{num}	$-$	$\Vert$	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

$f(-1)=-3$

f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-2[$; *f* est croissante sur l'intervalle $]-2\,;-1]$;

f est décroissante sur l'intervalle $[-1\,;0[$; *f* est décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$\boxed{12}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto x-\dfrac{1}{x}}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ ou comme fonction rationnelle (à condition de mettre préalablement l'expression de *f* au même dénominateur, ce qui montre que *f* est bien une fonction rationnelle).

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
Var de f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

Attention, on ne peut pas dire que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ (car $\mathbb{R}^*$ est une réunion d'intervalles).

On vérifie le résultat graphiquement.

Remarque : *f* est impaire c'est-à-dire que $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(-x)=f(x)$.

La courbe représentative admet donc l'origine du repère pour centre de symétrie.

$\boxed{13}$ **$f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$**

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3\left(x^2 - 1\right)$$
$$= 3(x-1)(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$

$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

f est strictement croissante sur] – ∞ ; – 1] et sur [1 ; + ∞[.
f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

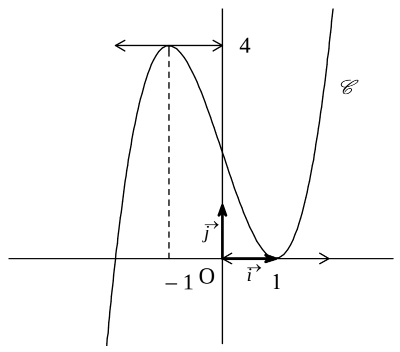
2°)

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0	3,125	4	3,375	2	0,625	0	0,875	4

$f(-2) = -8 + 6 + 2 = 0$
$f(-1{,}5) = -3{,}375 + 4{,}5 + 2 = -3{,}375 + 6{,}5 = 3{,}125$
$f(-0{,}5) = -0{,}125 + 1{,}5 + 2 = 3{,}375$
$f(0{,}5) = 0{,}125 - 1{,}5 + 2 = 0{,}625$
$f(1{,}5) = 3{,}375 - 4{,}5 + 2 = 0{,}875$
$f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$

3°) Il faut impérativement respecter l'unité indiquée.

4°)



Lors du tracé d'une courbe, après avoir placé les points, on les relie à la main, proprement.

1) Tracer les axes.

2) Tracer les vecteurs unités.

3) Placer les points correspondant aux extremums locaux, tracer les tangentes horizontales en ces points à la règle ainsi que les pointillés à la règle afin d'écrire les valeurs des coordonnées de ces points.

4) Placer les points du tableau de valeurs.

5) Joindre le plus harmonieusement possible ces points à la main et non à la règle.

6) Prolonger le tracé un peu avant – 2 et un peu après 2.

7) Écrire le nom de la courbe.

8) Tracer éventuellement quelques tangentes supplémentaires afin d'affiner le tracé.

$\boxed{14}$ **$f : x \mapsto \dfrac{1 - x}{1 + x^2}$**

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

1°) **Calcul de $f'(x)$**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle (quotient d'un polynôme de degré 1 sur un polynôme de degré 2).

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{-1 \times \left(1 + x^2\right) - 2x \times (1 - x)}{\left(1 + x^2\right)^2}$$
$$= \frac{-1 - x^2 - 2x + 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

2°) **Déterminons une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.**

On applique la formule donnant une équation de tangente (formule à savoir par cœur).

Une équation de T s'écrit $y = f\,'(0)(x-0)+f(0)$.

Or $f(0)=1$ et $f\,'(0)=-1$.

T a donc pour équation $y=-x+1$.

3°) **Déterminons les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.**

Les tangentes horizontales sont les tangentes de coefficient directeur nulle.

On résout l'équation $f\,'(x)=0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{x^2-2x-1}{\left(x^2+1\right)^2}=0$$

$x^2-2x-1=0$ (voir note ci-dessous)

$x=1-\sqrt{2}$ ou $x=1+\sqrt{2}$ (valeurs obtenues en calculant le discriminant ou, mieux, le discriminant réduit)

Conclusion :

La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.

Note pour la ligne $x^2-2x-1=0$:
Son discriminant réduit est égal à $\Delta'=2$ (formule $\Delta'=b'^2-ac$).
$\Delta'>0$ donc l'équation admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=1-\sqrt{2}$ et $x_2=1+\sqrt{2}$ (c'est bien « et » qu'il faut mettre et non « ou »).

$\boxed{15}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{x}{2x+1}}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

1°) **Calculons $f\,'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ comme fonction rationnelle (c'est même une fonction homographique, c'est-à-dire quotient de deux fonctions affines).

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad f\,'(x)=\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{(2x+1)^2}$$

2°) **Étudions les variations de *f*.**

La dérivée de *f* ne s'annule en aucun réel.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de 1		$+$		$+$	
Signe de $(2x+1)^2$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	
Signe de $f\,'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
(f est strictement croissante sur le 1^er^ intervalle et sur le 2^e^ intervalle).

3°) **Déterminons les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ : $y=4x$.**

Deux droites (non parallèles à l'axe des ordonnées) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

il s'agit bien d'une équivalence

Le coefficient directeur de Δ est égal à 4.

On résout l'équation $f\,'(x)=4$ (1).

On se place dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ (ensemble de référence pour les équivalences).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{1}{(2x+1)^2}=4$$

$$(2x+1)^2=\frac{1}{4}$$

Ne pas développer le 1[er] membre.

$2x+1=\frac{1}{2}$ ou $2x+1=-\frac{1}{2}$

$2x=\frac{1}{2}-1$ ou $2x=-\frac{1}{2}-1$

$2x=-\frac{1}{2}$ ou $2x=-\frac{3}{2}$

$x=-\frac{1}{4}$ ou $x=-\frac{3}{4}$

La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ d'équation $y=4x$ aux points d'abscisses $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{4}$.

Commentaire :

On déduit le coefficient directeur de Δ à partir de son équation réduite ($y=4x$).

Formule pour trouver la dérivée d'une fonction homographique (quotient de deux fonctions affines) :

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$\boxed{16}$ $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\mathscr{D}_f$ est centré en – 2.

Soit h un réel quelconque.

$-2+h\in\mathscr{D}_f \Leftrightarrow -2+h\neq-2$

$\Leftrightarrow h\neq0$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq0$.

On effectue les calculs de $f(-2+h)$ et $f(-2-h)$ séparément.

$$f(-2+h)=\frac{(-2+h)^2+3(-2+h)+1}{-2+h+2}=\frac{4-4h+h^2-6+3h+1}{h}=\frac{h^2-h-1}{h}$$

$$f(-2-h)=\frac{(-2-h)^2+3(-2-h)+1}{-2-h+2}=\frac{4+4h+h^2-6-3h+1}{-h}=\frac{h^2+h-1}{-h}=-\frac{h^2+h-1}{h}$$

(On peut aussi tout simplement remplacer h par $-h$ dans le calcul de $f(-2+h)$).

$$\forall h\neq0\quad f(-2+h)+f(-2-h)=\frac{h^2-h-1}{h}-\frac{h^2+h-1}{h}=-\frac{2h}{h}=-2=2\times(-1)$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-2\,;-1)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{17}$ $f(x)=x^3+3x^2$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$

Démontrons que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-1\,;2)$ pour centre de symétrie.

$\mathscr{D}_f$eeee est centré en – 1.

Soit h un réel quelconque.

On effectue les calculs de $f(-1+h)$ et $f(-1-h)$ séparément.

$$f(-1+h)=(-1+h)^3+3(-1+h)^2=-1+3h-3h^2+h^3+3(1-2h+h^2)=h^3-3h+2$$

$f(-1-h)=-h^3+3h+2$ (On remplace h par $-h$ dans le calcul de $f(-1+h)$)

$$\forall h\in\mathbb{R}\quad f(-1+h)+f(-1-h)=h^3-3h+2-h^3+3h+2=4=2\times2$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-1\,;2)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{18}$ $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(1\,;3)$ pour centre de symétrie.

$\mathscr{D}_f$ est centré en 1.

Soit h un réel quelconque.

$1+h\in\mathscr{D}_f \Leftrightarrow 1+h\neq1$

$\Leftrightarrow h\neq0$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq0$.

On effectue les calculs de $f(1+h)$ et $f(1-h)$ séparément.

$$f(1+h)=\frac{3(1+h)-2}{1+h-1}=\frac{3h+1}{h}$$

$$f(1-h)=\frac{3(-h)+1}{-h}=-\frac{-3h+1}{h}=\frac{3h-1}{h}$$

(On peut aussi tout simplement remplacer h par $-h$ dans le calcul de $f(1+h)$).

$\forall h \neq 0 \quad f(1+h)+f(1-h)=\dfrac{3h+1}{h}+\dfrac{3h-1}{h}=\dfrac{6h}{h}=6=2\times 3$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(1\,;3)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{19}$ $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{0\,;-2\}$

Le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal.

Démontrons que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie.

$\mathscr{D}_f$ est centré en – 1.

Soit h un réel quelconque.

$$\begin{aligned} -1+h\in\mathscr{D}_f &\Leftrightarrow -1+h\neq 0 \text{ et } -1+h\neq -2 \\ &\Leftrightarrow h\neq 1 \text{ et } h\neq -1 \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq 1$ et $h\neq -1$

On effectue les calculs de $f(-1+h)$ et $f(-1-h)$ séparément.

$$f(-1+h)=\frac{1}{(-1+h)^2+2(-1+h)}=\frac{1}{1-2h+h^2-2+2h}=\frac{1}{h^2-1}$$

$$f(-1-h)=\frac{1}{h^2-1}$$

$\forall h\in\mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\} \quad f(-1+h)=f(-1-h)$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie.

$\boxed{20}$

Principe général :

On cherche le minimum et le maximum de la fonction f sur l'intervalle considéré.
On peut étudier la fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier ou sur l'intervalle donné (ce qui, d'une certaine manière est plus simple).

Méthode :

• On étudie les variations de f sur $\mathbb{R}$ grâce à la dérivée.

• On calculer les images des bornes de l'intervalle I donné (il s'agit chaque fois d'un intervalle fermé borné).
On en déduit le maximum et le minimum global de f sur I. On peut éventuellement dresser le tableau de variations de f uniquement sur I.
« Le maximum global de f sur I est … ; le minimum global de f sur I est … ».

• On conclut par le meilleur encadrement demandé : « Le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\mathrm{I}$ est $\ldots\leqslant f(x)\leqslant\ldots$ ».

Il est important de retenir la rédaction qui est proposée (notamment pour le maximum global et le minimum global).

Conseil :

• On vérifie les variations sur la calculatrice graphique.

• Éventuellement, on peut utiliser la commande de la calculatrice permettant de déterminer le maximum et le minimum (global dans chaque cas) d'une fonction sur un intervalle fermé borné.

1°) $\boldsymbol{f : x\mapsto -x^3-2x^2+4x+3\ ;\ \mathrm{I}=[-3\,;1]}$

Déterminons le meilleur encadrement de $\boldsymbol{f(x)}$ pour $\boldsymbol{x\in\mathrm{I}}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-3x^2-4x+4$

Le polynôme $-3x^2-4x+4$ a pour racines $\dfrac{2}{3}$ et – 2.

x	$-\infty$		-3		-2		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		–		–	0	+	0	–		–	
Variations de f		↘	0	↘	-5	↗	$\frac{121}{27}$	↘	4	↘	

On calcule les valeurs des extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$:

$f(-2)=-5$ (minimum local d'après le tableau de variations)

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{121}{27}$ (minimum global d'après le tableau de variations)

On calcule ensuite les images des bornes de l'intervalle I :

$f(-3)=0$

$f(1)=4$

D'après la calculatrice, $\dfrac{121}{27}=4,4814814...$

Le minimum global de *f* sur I est égal à – 5 et le maximum global de *f* sur I est égal à $\dfrac{121}{27}$.

Il s'agit bien cette fois d'extremum globaux sur l'intervalle I et non d'extremums globaux.

On en déduit que le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\text{I}$ est : $\boxed{-5\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{121}{27}}$.

2°) $\boldsymbol{f : x\mapsto 2x^3-9x^2+12x+1}$ **;** $\mathbf{I=[0\,;6]}$

Déterminons le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\text{I}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=6\left(x^2-3x+2\right)$

$f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 (racine évidente) et 2 (obtenue par produit).

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de *f*		↗	6	↘	5	↗	

$f(0)=1$

$f(6)=181$

Le minimum global de *f* sur I est égal à 1 et le maximum global de *f* sur I est égal à 181.

On en déduit que le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\text{I}$ est : $\boxed{1\leqslant f(x)\leqslant 181}$.

3°) $\boldsymbol{f : x\mapsto \dfrac{9}{x}+x-1}$ **;** $\mathbf{I=[1\,;4]}$

Déterminons le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\text{I}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=-\dfrac{9}{x^2}+1=1-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2-9}{x^2}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$

La mise au même dénominateur est obligatoire pour l'étude du signe.
En revanche, la factorisation de x^2-9 ne l'est pas.

Dans le tableau ci-dessous, il faudrait faire plusieurs lignes avant d'écrire la ligne du signe de $f'(x)$.

(SGN de $x-3$, SGN de $x+3$ et SGN de $(x+1)^2$ …)

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		+	0	–	‖	–	0	+	
Variations de *f*		↗	-7	↘	‖	↘	5	↗	

$f(1)=9$

$f(4)=\dfrac{21}{4}$

Le minimum global de *f* sur I est égal à 5 et le maximum global de *f* sur I est égal à 9.

On en déduit que le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\text{I}$ est : $\boxed{5\leqslant f(x)\leqslant 9}$.

4°) $\boldsymbol{f : x\mapsto \dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}}$ **;** $\mathbf{I=[1\,;8]}$

Déterminons le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\text{I}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+4}{(x+1)^2}$

Dans le tableau ci-dessous, il faudrait faire plusieurs lignes avant d'écrire la ligne du signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		-1		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		–	0	+	‖	+	0	–	
Variations de *f*		↘	$5+2\sqrt{5}$	↗	‖	↗	$5-2\sqrt{5}$	↘	

D'après la calculatrice, $-1+\sqrt{5}=1,236...$

$f(1)=\dfrac{-1^2+3\times1-1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$f(8)=\dfrac{-8^2+3\times 8-1}{8+1}=-\dfrac{41}{9}$

Le minimum global de *f* sur I est égal à $-\dfrac{41}{9}$ et le maximum global de *f* sur I est égal à $5-2\sqrt{5}$.

On en déduit que le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$ est : $\boxed{-\dfrac{41}{9}\leqslant f(x)\leqslant 5-2\sqrt{5}}$.

Complément pour le 4°) : calcul des extremums

On considère une fonction *f* définie par $f=\dfrac{u}{v}$ où *u* et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que *v* ne s'annule pas sur I.

On a alors $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Si $f'(a)=0$, alors $u'(a)v(a)-u(a)v'(a)=0$.

Donc sous réserve d'existence des dénominateurs, on a : $\boxed{f(a)=\dfrac{u(a)}{v(a)}=\dfrac{u'(a)}{v'(a)}}$.

Ici, $u(x)=-x^2+3x-1$

$v(x)=x+1$

$u'(x)=-2x+3$

$v'(x)=1$

$$f\left(-1+\sqrt{5}\right)=\frac{u\left(-1+\sqrt{5}\right)}{v\left(-1+\sqrt{5}\right)}=\frac{u'\left(-1+\sqrt{5}\right)}{v'\left(-1+\sqrt{5}\right)}=\frac{-2\left(-1+\sqrt{5}\right)+3}{1}=5-2\sqrt{5}$$

Dans les exercices d'optimisation, on dit toujours ce que l'on cherche : maximum ou minimum autrement dit si l'on cherche à maximiser ou à minimiser une grandeur.

$\boxed{21}$ **Problème d'optimisation**

Il s'agit d'un problème d'optimisation dans l'espace.

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace serait intéressante pour ce type d'exercice.

Il est important de se souvenir que $x\in[0\,;10]$ comme cela est dit dans l'énoncé.

Refaire la figure comme c'est demandé !
On pensera à bien respecter les conventions des tracés en pointillés pour les arêtes cachées.

1°) **Exprimons V(*x*) en fonction de *x*.**

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(x)&=\mathrm{AM}\times\mathrm{AQ}\times\mathrm{AN}\\&=x\times x\times(10-x)\\&=x^2\times(10-x)\end{aligned}$$

2°) **Déterminons pour quelle valeur de *x* le volume de AMRQNPTS est maximal.**

On cherche le maximum de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 10].
Pour cela, on étudie les variations de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 10].
On va utiliser la dérivée.

V est dérivable sur l'intervalle [0 ; 10] comme fonction polynôme.

$\forall x\in[0\,;10]$ $\quad \mathrm{V}'(x)=2x\times(10-x)+x^2\times(-1)$ (nous appliquons la formule de dérivation d'un produit)

$=x(20-3x)$

On aurait aussi pu développer $\mathrm{V}(x)$ et dériver l'expression développée mais cela conduit à plus de calculs.

x	0		$\frac{20}{3}$		10
SGN de x		$+$		$+$	
SGN de $20-3x$		$+$	0	$-$	
SGN de $V'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de V	0	$\nearrow$	$\frac{4000}{27}$	$\searrow$	0

Calcul du maximum :

$$V\left(\frac{20}{3}\right)=\left(\frac{20}{3}\right)^2\times\left(10-\frac{20}{3}\right)$$ (nous avons remplacé x par $\frac{20}{3}$ dans l'expression de V)

$$=\frac{4000}{27}$$

[Avec la calculatrice, on trouve $V\left(\frac{20}{3}\right)=148{,}148\underline{148}\ldots$]

Conclusion :

Le volume du parallélépipède AMRQNPTS est maximal pour $x=\frac{20}{3}$.

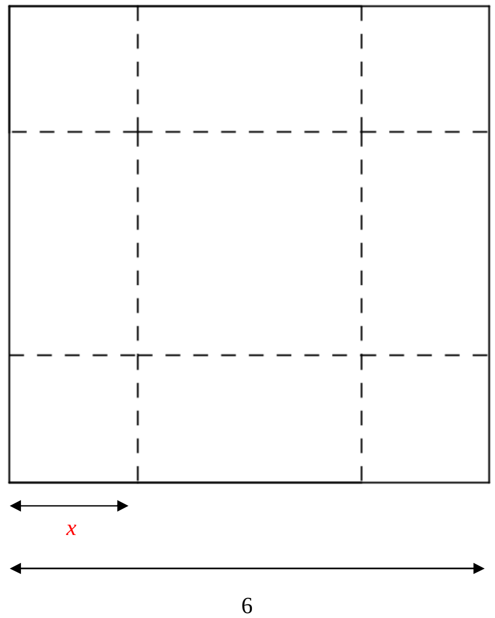
$\boxed{22}$ **Problème d'optimisation (problème de boîte sans couvercle, boîte parallélépipédique à base carrée)**

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace serait intéressante pour ce type d'exercice.

La première chose à faire est de faire une figure.

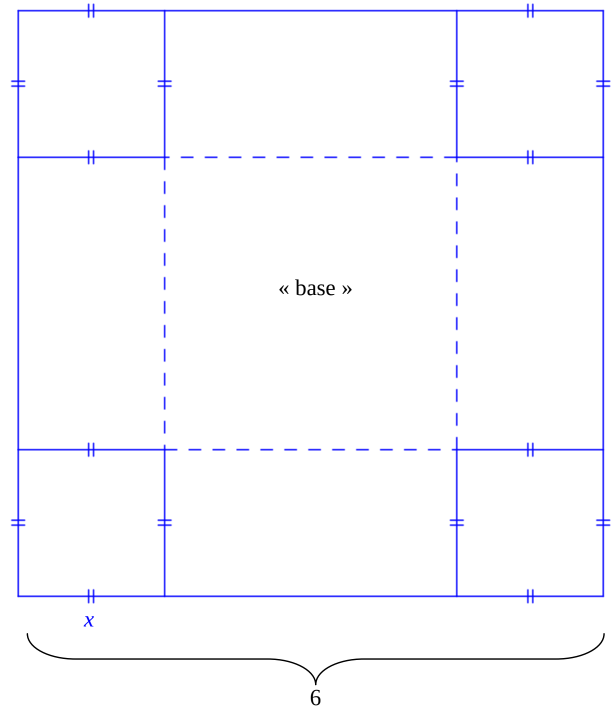
Faire une figure avec les traces de pliage.

On marque les codages correspondants aux longueurs égales et on dessine les pointillés correspondants aux traits de pliage (faire une figure avec les traits de pliage).



Le 12-1-2017

Remarque : Dans un patron, il y a toujours des pliages.



À la limite, on pourrait faire le patron de la boîte dans du papier un peu fort (on fait d'abord en sorte d'avoir une feuille carrée) et le découper.

On jette tous les coins du « carré ».

1°) **Exprimons les dimensions et le volume de la boîte en fonction de *x*.**

Les trois dimensions de la boîte en dm sont :

6 – 2*x*

6 – 2*x*

x

(Mieux vaut ne pas employer les mots « longueur », « largeur », « hauteur » pour un pavé droit.)

- Largeur : 6 – 2
- Longueur : 6 – 2x
- Hauteur : x

Le volume de la boîte est donné par $\mathbf{V(x)=(6-2x)^2\times x}$.

2°) **Cherchons pour quelle valeur de *x* le volume de la boîte est maximal.**

On cherche le maximum de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 3].
Pour cela, on étudie les variations de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 3].
On va utiliser la dérivée.

Pour calculer la dérivée, on peut développer l'expression de V mais c'est bien (mieux) de le faire sans développer à partir de la forme factorisée donnée à la question 1°).

V est dérivable sur l'intervalle [0 ; 3] comme fonction polynôme.

$$\forall x\in[0;3]\qquad \begin{aligned}\mathrm{V}'(x)&=2\times(-2)\times(6-2x)\times x+(6-2x)^2\times 1 \ *\\&=(6-2x)\times(-4x+6-2x)\\&=(6-2x)\times(6-6x)\\&=2(3-x)\times 6(1-x)\\&=12(3-x)(1-x)\end{aligned}$$

* Nous appliquons la formule de dérivation d'un produit.
On doit donc dériver la fonction $x\mapsto(6-2x)^2$ (principe de « sous-dérivée » c'est-à-dire de dérivée dans la dérivée)
On utilise la formule de dérivation $(u^2)'=2uu'$.

On aurait aussi pu développer $\mathrm{V}(x)$ mais cela donne davantage de calculs.

$u(x)=(6-2x)^2$	$v(x)=x$
$u'(x)=2\times(6-2x)\times(-2)$	$v'(x)=1$
$u'(x)=-4(6-2x)$	

Explication plus détaillée :

$\mathrm{V}(x)=x(6-2x)^2$

Pour calculer la dérivée, on ne peut pas isoler le x en tant que k (ce n'est pas une fonction du type « ku »).

- Travail préparatoire :

On analyse la forme de $\mathrm{V}(x)$. C'est un produit.

$\mathrm{V}=uv$ avec $u:x\mapsto x$ et $v:x\mapsto(6-2x)^2$

$u'(x)=1$ et $v'(x)=2(6-2x)\times(-2)$

$\mathrm{V}=uv$

$\mathrm{V}'=u'v+uv'$

- Calcul à écrire :

On n'écrit pas la formule utilisée. En revanche, la première ligne comporte la trace de la formule de dérivation utilisée.

$\mathrm{V}'(x)=1\times(6-2x)^2+x\times2\times(6-2x)\times(-2)$
$\mathrm{V}'(x)=(6-2x)\times(6-2x-4x)$
$\mathrm{V}'(x)=(6-2x)\times(6-6x)$
$\mathrm{V}'(x)=2(3-x)\times6(1-x)$ (on « sort » le 2 du premier facteur et on « sort » le 6 du deuxième facteur)
$\mathrm{V}'(x)=12(3-x)(1-x)$

Remarque :

Une autre forme de la dérivée est $\mathrm{V}'(x)=12(x-3)(x-1)$.

x	0		1		3
SGN de $3-x$		+		+	
SGN de $1-x$		+	0	$-$	
SGN de $\mathrm{V}'(x)$		+	0	$-$	
Variations de V	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Calcul du maximum global de V sur l'intervalle $[0\,;3]$: $\mathrm{V}(1)=16$

Conclusion :

Le volume de la boîte est maximal pour $\boldsymbol{x=1}$.
Dans ce cas, il vaut 16 dm^3.

3°) **Déterminons à l'aide de la calculatrice les valeurs décimales approchées d'ordre 3 par défaut des valeurs de x pour lesquelles le volume de la boîte est égal à 10 dm^3.**

On doit résoudre l'équation $\mathrm{V}(x)=10 \quad (1)$ avec $x\in[0\,;3]$.

(1) s'écrit $x(6-2x)^2=10$.

Si on développe le premier membre, on obtient l'équation $x\left(4x^2-24x+36\right)=10$ qui est équivalente à $4x^3-24x^2+36x-10=0$.

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 3.
On ne sait pas la résoudre de manière exacte donc on va utiliser une résolution approchée à l'aide de la calculatrice.

On utilise l'application de résolution des équations polynomiales de la calculatrice.

On trouve $x_1=0,3582164\ldots$ et $x_2=1,831745\ldots$ (pour la troisième solution x_3, non retenue, on obtient $x_3=3,8100\ldots$).

Autre méthode :
On trace la représentation graphique de la fonction V sur l'écran de la calculatrice.
On trace également la représentation graphique de la fonction $x\mapsto 10$.
On utilise une bonne fenêtre graphique (par exemple, $\mathrm{X\,min}=0$, $\mathrm{X\,max}=4$, $\mathrm{Y\,min}=0$, $\mathrm{Y\,max}=18$).

On cherche les abscisses des points d'intersection des deux représentations graphiques (faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ 5 : intersect).

On observe deux points d'intersection dont les abscisses x_1 et x_2 appartiennent à l'intervalle $[0\,;3]$ (on observe un troisième point d'intersection mais son abscisse x_3 n'est pas dans l'intervalle $[0\,;3]$).

On fait deux fois la démarche.

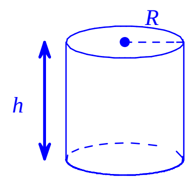
On trouve $x_1=0,3582164\ldots$ et $x_2=1,831745\ldots$ (pour la troisième solution x_3, non retenue, on obtient $x_3=3,8100\ldots$).

Les deux solutions que l'on conserve sont les deux premières car elles appartiennent à l'intervalle [0 ; 3].

Il s'agit de nombres irrationnels (on peut le démontrer aisément avec des résultats de Terminale spécialité).

$\boxed{23}$ Boîte de conserve (problème d'optimisation)

L'objet de cet exercice est la résolution d'un problème d'optimisation relié à une situation concrète.



1°) **Démontrons que $\pi R^2 h=1$.**

On sait que le volume de la boîte est égal à 1 dm^3.
Donc $\pi R^2 h=1 \quad (1)$ (cf. formule du volume d'un cylindre de révolution).

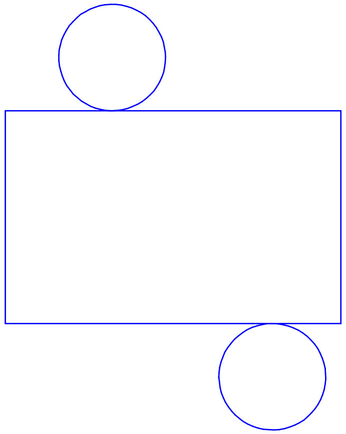
2°) Exprimons S en fonction de R.

L'aire totale d'un cylindre est la somme de l'aire de la surface latérale et des aires des deux disques (ce que l'on voit sur un patron).

Faire le patron du cylindre à la règle.

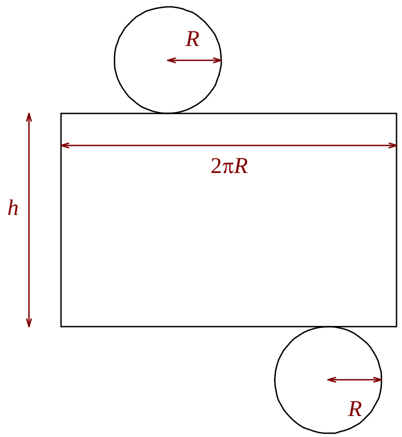
aire totale d'un cylindre de révolution = aire latérale + aire des deux disques

Faire une figure.



Sur un patron, la surface latérale est représentée par un rectangle.

Pou bien comprendre, il faut compléter le patron avec les mesures.



On doit calculer l'aire S du patron.

Cette aire est égale à la somme de l'aire latérale représentée sur le patron par un rectangle et par la somme des aires des deux disques de base.

On a : $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

(1) donne $\pi Rh \times R = 1$ d'où $\pi Rh = \dfrac{1}{R}$.

On en déduit :

$$\boxed{S = \frac{2}{R} + 2\pi R^2}$$

3°)

● Déterminons *R* pour que *S* soit minimale.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x} + 2\pi x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 4\pi x$

$$= \frac{2\left(2\pi x^3 - 1\right)}{x^2}$$

On cherche x tel que $2\pi x^3 - 1 = 0$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$x^3 = \dfrac{1}{2\pi}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ ($\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ désigne la racine cubique de $\dfrac{1}{2\pi}$)

$x = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2\pi}}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$

La valeur exacte de la valeur charnière est égale à $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ (on peut obtenir le début de l'écriture décimale de la racine cubique de 2π grâce à la calculatrice).

À l'aide de la calculatrice, on peut donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = 0,541926070...$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$		$+\infty$
Signe de $2\pi x^3-1$		$-$	0^{num}	$+$	
Signe de x^2	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\|$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f	$\|$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, on peut voir que f admet un minimum global sur $\left]0\,;+\infty\right[$ atteint pour $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

On en déduit que S est minimale pour $R=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Avec les limites en 0 et en + infini, on pourrait voir que f n'admet pas de maximum global sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

● Démontrons qu'alors $h=2R$.

$R=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ d'où $R^3=\frac{1}{2\pi}$ donc $2\pi R^3=1$.

Par conséquent, $h=\frac{1}{\pi R^2}=\frac{2R\times 1}{2R\times \pi R^2}\frac{2R}{2\pi R^3}=\frac{2R}{1}=2R$

On peut multiplier le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même réel non nul.

La hauteur de la boîte est égale au double du rayon du disque de base c'est-à-dire au diamètre.
On peut vérifier cette propriété sur des boîtes de conserve ordinaires.

1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur sens de variation des fonctions dérivables

Étude des variations de fonctions polynômes

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{4}$, calculer $f'(x)$.
Dresser le tableau de variation de *f* ; on tracera les flèches à la règle.
Calculer les extremums locaux éventuels et compléter le tableau de variation.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.
Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

$\boxed{1}$ $f(x)=-2x^3+6x-3$ (factoriser $f'(x)$)

$\boxed{2}$ $f(x)=x^3-3x^2+3$ (factoriser $f'(x)$)

$\boxed{3}$ $f(x)=x^3+x-1$

$\boxed{4}$ $f(x)=-x^3+x^2+x-2$

Étude des variations de fonctions rationnelles

Dans les exercices $\boxed{5}$ à $\boxed{12}$, déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f*, déterminer sur quel ensemble *f* est dérivable et calculer $f'(x)$.
Dresser le tableau de variation de *f* ; on tracera les flèches à la règle.
On n'oubliera pas de mettre des doubles barres sur la ligne intitulée « Signe de $f'(x)$ » et sur la ligne « Variations de *f* » lorsque la fonction n'est pas définie.
Attention, pour tracer une double barre, on utilise la règle pour tracer un trait continu entre la ligne intitulée « Signe de $f'(x)$ » et la ligne « Variations de *f* ».
Calculer les extremums éventuels et compléter le tableau de variations.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.
Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ (déterminer d'abord le domaine de définition de *f*)

$\boxed{6}$ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ (factoriser le numérateur de $f'(x)$; ne pas oublier les doubles barres)

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

$\boxed{8}$ $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x+3}$

$\boxed{9}$ $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$

$\boxed{10}$ $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$\boxed{11}$ $f(x)=\dfrac{3}{x^2+2x}$

$\boxed{12}$ $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

$\boxed{13}$ **Étude d'une fonction polynôme du troisième degré**

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3-3x+2$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 centimètre ou 1 « gros » carreau).

1°) Calculer $f'(x)$ en factorisant le résultat et faire le tableau de variations de *f*. Calculer les extremums locaux.
Faire des phrases expliquant les variations.

2°) Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

3°) Sur un graphique, tracer le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ en respectant l'unité indiquée au début de l'exercice.
Placer les points du tableau précédent.
Mettre des pointillés et les valeurs sur les axes pour les points correspondant aux extremums locaux.
Tracer les tangentes horizontales en ces points. On rappelle que l'on représente usuellement une tangente par une double flèche.

4°) Tracer $\mathscr{C}$ en reliant les points précédents à la main en tenant compte du tableau de variations.
On soignera particulièrement l'allure de la courbe au voisinage des tangentes horizontales.
Contrôler sur la calculatrice graphique ou sur un logiciel de tracé de courbes tel que *Sinequanon*.

$\boxed{14}$ On considère la fonction *f* définie par $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x^2}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.
(ou formulation équivalente :
Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.)

$\boxed{15}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2x+1}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Dresser le tableau de variations de *f*.
3°) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y=4x$.

Les exercices **16** à **19** ne sont pas à faire.

Dans chacun des exercices **16** à **19** , on donne une fonction *f* et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

16 $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.
Démontrer que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-2\,;-1)$ pour centre de symétrie.

17 $f(x)=x^3+3x^2$.
Démontrer que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-1\,;2)$ pour centre de symétrie.

18 $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$.
Démontrer que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(1\,;3)$ pour centre de symétrie.

19 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$.
Démontrer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie ; on suppose que le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est **orthogonal**.

20 Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f*.
Faire le tableau de variations de *f* ; en déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$, I étant un intervalle précisé dans chaque cas.

Principe :
- On détermine le minimum *m* et le maximum *M* de *f* sur l'intervalle I proposé dans chaque cas.
- On peut alors écrire l'encadrement de $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. C'est le meilleur encadrement possible de $f(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.

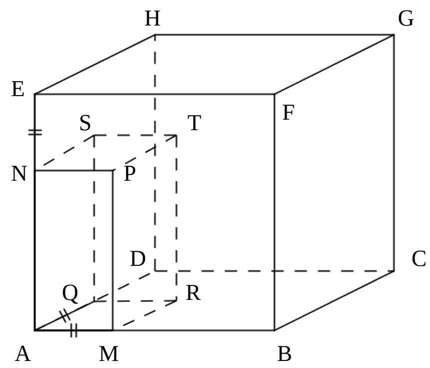
1°) $f : x \mapsto -x^3-2x^2+4x+3$; $\mathrm{I}=[-3\,;1]$.
2°) $f : x \mapsto 2x^3-9x^2+12x+1$; $\mathrm{I}=[0\,;6]$.
3°) $f : x \mapsto \dfrac{9}{x}+x-1$; $\mathrm{I}=[1\,;4]$.
4°) $f : x \mapsto \dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}$; $\mathrm{I}=[1\,;8]$.

21 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 10.
Pour tout réel $x \in [0\,;10]$, on construit :
- le point M de [AB] tel que $\mathrm{AM}=x$;
- le point N de [AE] tel que $\mathrm{EN}=x$;
- le point Q de [AD] tel que $\mathrm{AQ}=x$;
- le parallélépipède AMRQNPTS.

On note $\mathrm{V}(x)$ le volume du parallélépipède AMRQNPTS.

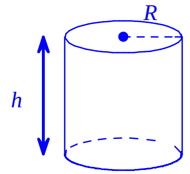
Reproduire la figure.

1°) Exprimer $\mathrm{V}(x)$ en fonction de *x*.
2°) Déterminer pour quelle valeur de *x* le volume de AMRQNPTS est maximal.



22 L'unité de longueur est le décimètre.
On désire réaliser une boîte en papier qui a la forme d'un pavé droit sans couvercle. Pour cela, on dispose d'une feuille carrée de côté 6. En enlevant dans chaque « coin » un carré de côté *x* ($0<x<3$) et en effectuant des pliages, on peut réaliser une boîte sans couvercle à base carrée.
On note $\mathrm{V}(x)$ le volume de la boîte en dm^3.
Faire une figure du patron de la boîte (en deux dimensions).
On peut éventuellement découper le patron en prenant 6 cm pour côté du carré (et non 6 dm !).
1°) Préciser les trois dimensions de la boîte puis exprimer $\mathrm{V}(x)$ en fonction de *x*.
2°) Pour quelle valeur de *x* le volume de la boîte est-il maximal ?
3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice les valeurs décimales approchées d'ordre 3 par défaut des réels *x* pour lesquels le volume de la boîte de 10 dm^3.

$\boxed{\textbf{23}}$ Une boîte de conserve a la forme d'un cylindre de révolution. Son volume est de 1 dm^3.



On note R le rayon de la base (en dm), h la hauteur (en dm) et S l'aire totale (en dm^2).
Reproduire la figure.

1°) Démontrer que $\pi R^2 h = 1$.

2°) Exprimer S en fonction de R.

Indication : On pourra réfléchir à partir du patron de la boîte de conserve.

3°) Déterminer R pour que S soit minimale. Démontrer qu'alors la hauteur est égale au diamètre.

Corrigé

Point-méthode valable pour tous les exercices :

> Pour calculer les extremums, on utilise la « forme de base ».

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto -2x^3 + 6x - 3$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 6 \\ &= 6\left(1 - x^2\right) \\ &= 6(1+x)(1-x) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de 6*		+		+		+	
Signe de $1+x$		–	0	+	|	+	
Signe de $1-x$		+	|	+	0	–	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de f		↘	-7	↗	1	↘	

On ne met que des + sur la première ligne car 6 est toujours positif « quoiqu'il » arrive.

** Ligne facultative car 6 est un nombre strictement positif.*

On calcule les extremums locaux de f en – 1 et en 1 :

$f(-1) = \ldots = -7$

$f(1) = \ldots = 1$

f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

La fonction f présente un minimum local en – 1 égal à – 7.

La fonction f présente un maximum local en 1 égal à 1.

Remarque : positionner les extremums au bout des flèches.

> **Vérifier avec une calculatrice graphique ou avec un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur.**

$\boxed{2}$ $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		–	0	+		+	
Signe de $x-2$		–		–	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	3	↘	-1	↗	

On calcule les extremums locaux en 0 et en 2.

$f(0) = 3$

$f(2) = 2^3 - 3\times 2^2 + 3 = 8 - 12 + 3 = -4 + 3 = -1$

Le tableau de variation fait apparaître deux extremums locaux.

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto x^3 + x - 1$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 3x^2 + 1$$

Cette expression ne s'annule jamais, elle est toujours strictement positive, donc dans la ligne « SGN de $f'(x)$ » du tableau récapitulatif, on ne met aucun 0.

x	$-\infty$	$+\infty$
SGN de $f'(x)$	+	
Variations de f	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f n'admet pas d'extremum.

Commentaires :

- Il y a un seul signe sur la ligne « SGN de $f'(x)$ ». Cela peut surprendre de prime abord.
- La courbe représentative de la fonction f n'admet ni début ni fin.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto -x^3 + x^2 + x - 2$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$

$f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 (racine évidente) et $-\dfrac{1}{3}$ (obtenue par produit).

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de f		$\searrow$	$-\dfrac{59}{27}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

$f(1) = -1^3 + 1^2 + 1 - 2 = -1$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{1+3-9-54}{27} = \frac{4-9-54}{27} = -\frac{59}{27}$$

Dans le tableau de variations, on ne met que des valeurs exactes.

f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;1\right]$.

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right]$ et sur $[1\,;+\infty[$ (ne pas dire sur la réunion des deux intervalles).

Attention, les deux intervalles sont fermés (il n'y a pas de « zone plate » pour la représentation graphique).

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme fonction rationnelle (ou même comme fonction homographique).

Fonction dont l'expression est du type $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad f'(x) = \frac{1\times(x-2) - (x+1)\times 1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$$

La dérivée de f ne s'annule en aucun réel.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de – 3		–		–	
Signe de $(x-2)^2$ *		+	$0^{\text{dén}}$	+	
Signe de $f'(x)$		–	$\Vert$	–	
Variations de f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

* Un carré est toujours positif ou nul.

On met une double barre dans le tableau de variations au niveau de la valeur interdite.

f est strictement décroissante sur les intervalle $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

6 $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ ou comme fonction rationnelle (à condition de mettre préalablement l'expression de f au même dénominateur, ce qui montre que f est bien une fonction rationnelle).

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

Seule cette écriture de la dérivée sous forme d'un quotient dont le numérateur est factorisé permet de bien étudier le signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
SGN de $x+1$		$-$	0^{num}	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de x^2		$+$		$+$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

On a une double barre à partir du signe de $f'(x)$.

Il peut être choquant à première vue de trouver que le maximum de f sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ plus petit que le minimum de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Mais il ne faut pas oublier que ce sont des extremums locaux de f !

7 $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x(2x-2-x)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
SGN de x		$-$	0^{num}	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $(x-1)^2$		$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

8 $f : x \mapsto x - 1 + \dfrac{4}{x+3}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ comme fonction rationnelle.

On peut aussi écrire « f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ comme somme d'une fonction polynôme et d'une fonction homographique ».

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\} \quad f'(x) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right)$$
$$= \frac{(x+3)^2 - 4}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{(x+3)^2 - 2^2}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{[(x+3)+2][(x+3)-2]}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)^2}$$

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
SGN de $x+5$		$-$	0^{num}	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x+1$		$-$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $(x+3)^2$		$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	$\|$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-8	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\boxed{9}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f'(x) = \frac{(2x-3)\times(x+1) - (x^2-3x)\times 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

x^2+2x-3 est un polynôme du second degré qui admet pour racines 1 (racine évidente) et – 3 (obtenue par produit).

On peut aussi calculer le discriminant réduit (en posant $a=1$, $b=2$, $b'=1$, $c=-3$).

$\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' = 4$

$\Delta' > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -3 \qquad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 1$$

Remarque : Pour Δ', le prime ne veut pas dire que l'on fait le discriminant de f' ! Il signifie « discriminant réduit ».

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
SGN de x^2+2x-3		$+$	0^{num}	$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $(x+1)^2$		$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	$\|$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-9	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty\,;-3]$ et $[1\,;+\infty[$.

f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3\,;-1[$ et $]-1\,;1]$.

$\boxed{10}$ $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{2\times(x^2+1) - 2x\times(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $1+x$		$-$	0^{num}	$+$		$+$	
SGN de $1-x$		$+$		$+$	0^{num}	$-$	
SGN de $\left(x^2+1\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$-$	0^{num}	$+$	0^{num}	$-$	
Variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

$f(1)=\dfrac{2\times1}{1^2+1}=1$

$f(-1)=\dfrac{2\times(-1)}{(-1)^2+1}=-1$

$\boxed{11}$ $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+2x}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+2x\neq 0$

si et seulement si $x(x+2)\neq 0$

si et seulement si $x\neq 0$ et $x+2\neq 0$

si et seulement si $x\neq 0$ et $x\neq -2$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{0\,;-2\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\,;-2\}$ comme fonction rationnelle (en effet, la fonction $x\mapsto 3$ est une fonction polynôme car c'est une fonction constante).

Pour calculer la dérivée, on effectue une réécriture de $f(x)$.

On écrit $f(x)=3\times\dfrac{1}{x^2+2x}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\,;-2\}\quad f'(x)=3\times\left[-\frac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}\right]$$

$$=-\frac{6(x+1)}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
SGN de -6		$-$		$-$		$-$		$-$	
SGN de $x+1$		$-$		$-$	0^{num}	$+$		$+$	
SGN de $\left(x^2+2x\right)^2$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0^{num}	$-$	$\|\|$	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

$f(-1)=-3$

f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-2[$; f est croissante sur l'intervalle $]-2\,;-1]$;

f est décroissante sur l'intervalle $[-1\,;0[$; f est décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$\boxed{12}$ $f : x\mapsto x-\dfrac{1}{x}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ ou comme fonction rationnelle (à condition de mettre préalablement l'expression de f au même dénominateur, ce qui montre que f est bien une fonction rationnelle).

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
Var de f		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

Attention, on ne peut pas dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ (car $\mathbb{R}^*$ est une réunion d'intervalles).

On vérifie le résultat graphiquement.

Remarque : f est impaire c'est-à-dire que $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(-x)=f(x)$.

La courbe représentative admet donc l'origine du repère pour centre de symétrie.

$\boxed{13}$ **$f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$**

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3\left(x^2 - 1\right)$$
$$= 3(x-1)(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$

$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

f est strictement croissante sur]$-\infty$; -1] et sur [1 ; $+\infty$[.
f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

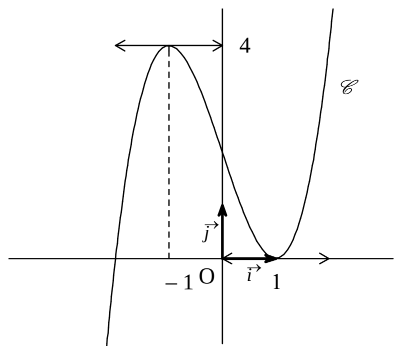
2°)

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0	3,125	4	3,375	2	0,625	0	0,875	4

$f(-2) = -8 + 6 + 2 = 0$
$f(-1{,}5) = -3{,}375 + 4{,}5 + 2 = -3{,}375 + 6{,}5 = 3{,}125$
$f(-0{,}5) = -0{,}125 + 1{,}5 + 2 = 3{,}375$
$f(0{,}5) = 0{,}125 - 1{,}5 + 2 = 0{,}625$
$f(1{,}5) = 3{,}375 - 4{,}5 + 2 = 0{,}875$
$f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$

3°) Il faut impérativement respecter l'unité indiquée.

4°)



Lors du tracé d'une courbe, après avoir placé les points, on les relie à la main, proprement.

1) Tracer les axes.

2) Tracer les vecteurs unités.

3) Placer les points correspondant aux extremums locaux, tracer les tangentes horizontales en ces points à la règle ainsi que les pointillés à la règle afin d'écrire les valeurs des coordonnées de ces points.

4) Placer les points du tableau de valeurs.

5) Joindre le plus harmonieusement possible ces points à la main et non à la règle.

6) Prolonger le tracé un peu avant -2 et un peu après 2.

7) Écrire le nom de la courbe.

8) Tracer éventuellement quelques tangentes supplémentaires afin d'affiner le tracé.

$\boxed{14}$ **$f : x \mapsto \dfrac{1 - x}{1 + x^2}$**

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

1°) **Calcul de $f'(x)$**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle (quotient d'un polynôme de degré 1 sur un polynôme de degré 2).

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{-1 \times \left(1 + x^2\right) - 2x \times (1 - x)}{\left(1 + x^2\right)^2}$$
$$= \frac{-1 - x^2 - 2x + 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

2°) **Déterminons une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.**

On applique la formule donnant une équation de tangente (formule à savoir par cœur).

Une équation de T s'écrit $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.

Or $f(0)=1$ et $f'(0)=-1$.

T a donc pour équation $y=-x+1$.

3°) **Déterminons les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.**

Les tangentes horizontales sont les tangentes de coefficient directeur nulle.

On résout l'équation $f'(x)=0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{x^2-2x-1}{\left(x^2+1\right)^2}=0$$

$x^2-2x-1=0$ (voir note ci-dessous)

$x=1-\sqrt{2}$ ou $x=1+\sqrt{2}$ (valeurs obtenues en calculant le discriminant ou, mieux, le discriminant réduit)

Conclusion :

La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.

Note pour la ligne $x^2-2x-1=0$:
Son discriminant réduit est égal à $\Delta'=2$ (formule $\Delta'=b'^2-ac$).
$\Delta'>0$ donc l'équation admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=1-\sqrt{2}$ et $x_2=1+\sqrt{2}$ (c'est bien « et » qu'il faut mettre et non « ou »).

$\boxed{15}$ $f : x \mapsto \dfrac{x}{2x+1}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ comme fonction rationnelle (c'est même une fonction homographique, c'est-à-dire quotient de deux fonctions affines).

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad f'(x)=\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{(2x+1)^2}$$

2°) **Étudions les variations de f.**

La dérivée de f ne s'annule en aucun réel.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de 1		+		+	
Signe de $(2x+1)^2$		+	$0^{\text{dén}}$	+	
Signe de $f'(x)$		+	‖	+	
Variations de f		↗	‖	↗	

La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
(f est strictement croissante sur le 1^er^ intervalle et sur le 2^e^ intervalle).

3°) **Déterminons les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ : $y=4x$.**

Deux droites (non parallèles à l'axe des ordonnées) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

il s'agit bien d'une équivalence

Le coefficient directeur de Δ est égal à 4.

On résout l'équation $f'(x)=4$ (1).

On se place dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ (ensemble de référence pour les équivalences).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{1}{(2x+1)^2}=4$$

$$(2x+1)^2=\frac{1}{4}$$

Ne pas développer le 1[er] membre.

$2x+1=\frac{1}{2}$ ou $2x+1=-\frac{1}{2}$

$2x=\frac{1}{2}-1$ ou $2x=-\frac{1}{2}-1$

$2x=-\frac{1}{2}$ ou $2x=-\frac{3}{2}$

$x=-\frac{1}{4}$ ou $x=-\frac{3}{4}$

La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ d'équation $y=4x$ aux points d'abscisses $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{4}$.

Commentaire :

On déduit le coefficient directeur de Δ à partir de son équation réduite ($y=4x$).

Formule pour trouver la dérivée d'une fonction homographique (quotient de deux fonctions affines) :

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$\boxed{16}$ $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\mathscr{D}_f$ est centré en – 2.

Soit h un réel quelconque.

$-2+h\in\mathscr{D}_f \Leftrightarrow -2+h\neq-2$

$\Leftrightarrow h\neq 0$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq 0$.

On effectue les calculs de $f(-2+h)$ et $f(-2-h)$ séparément.

$$f(-2+h)=\frac{(-2+h)^2+3(-2+h)+1}{-2+h+2}=\frac{4-4h+h^2-6+3h+1}{h}=\frac{h^2-h-1}{h}$$

$$f(-2-h)=\frac{(-2-h)^2+3(-2-h)+1}{-2-h+2}=\frac{4+4h+h^2-6-3h+1}{-h}=\frac{h^2+h-1}{-h}=-\frac{h^2+h-1}{h}$$

(On peut aussi tout simplement remplacer h par $-h$ dans le calcul de $f(-2+h)$).

$$\forall h\neq 0\quad f(-2+h)+f(-2-h)=\frac{h^2-h-1}{h}-\frac{h^2+h-1}{h}=-\frac{2h}{h}=-2=2\times(-1)$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-2\,;-1)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{17}$ $f(x)=x^3+3x^2$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$

Démontrons que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-1\,;2)$ pour centre de symétrie.

$\mathscr{D}_f$ *eeee* est centré en – 1.

Soit h un réel quelconque.

On effectue les calculs de $f(-1+h)$ et $f(-1-h)$ séparément.

$$f(-1+h)=(-1+h)^3+3(-1+h)^2=-1+3h-3h^2+h^3+3(1-2h+h^2)=h^3-3h+2$$

$f(-1-h)=-h^3+3h+2$ (On remplace h par $-h$ dans le calcul de $f(-1+h)$)

$$\forall h\in\mathbb{R}\quad f(-1+h)+f(-1-h)=h^3-3h+2-h^3+3h+2=4=2\times 2$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(-1\,;2)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{18}$ $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(1\,;3)$ pour centre de symétrie.

$\mathscr{D}_f$ est centré en 1.

Soit h un réel quelconque.

$1+h\in\mathscr{D}_f \Leftrightarrow 1+h\neq 1$

$\Leftrightarrow h\neq 0$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq 0$.

On effectue les calculs de $f(1+h)$ et $f(1-h)$ séparément.

$$f(1+h)=\frac{3(1+h)-2}{1+h-1}=\frac{3h+1}{h}$$

$$f(1-h)=\frac{3(-h)+1}{-h}=-\frac{-3h+1}{h}=\frac{3h-1}{h}$$

(On peut aussi tout simplement remplacer h par $-h$ dans le calcul de $f(1+h)$).

$\forall h \neq 0 \quad f(1+h)+f(1-h)=\dfrac{3h+1}{h}+\dfrac{3h-1}{h}=\dfrac{6h}{h}=6=2\times 3$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet le point $\Omega(1\,;3)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{19}$ **$f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$**

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{0\,;-2\}$

Le repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal.

Démontrons que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie.

$\mathscr{D}_f$ est centré en – 1.

Soit h un réel quelconque.

$$-1+h\in\mathscr{D}_f \Leftrightarrow -1+h\neq 0 \text{ et } -1+h\neq -2$$
$$\Leftrightarrow h\neq 1 \text{ et } h\neq -1$$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq 1$ et $h\neq -1$

On effectue les calculs de $f(-1+h)$ et $f(-1-h)$ séparément.

$$f(-1+h)=\frac{1}{(-1+h)^2+2(-1+h)}=\frac{1}{1-2h+h^2-2+2h}=\frac{1}{h^2-1}$$

$$f(-1-h)=\frac{1}{h^2-1}$$

$\forall h\in\mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\} \quad f(-1+h)=f(-1-h)$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie.

$\boxed{20}$

Principe général :

On cherche le minimum et le maximum de la fonction *f* sur l'intervalle considéré.
On peut étudier la fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier ou sur l'intervalle donné (ce qui, d'une certaine manière est plus simple).

Méthode :

• On étudie les variations de *f* sur $\mathbb{R}$ grâce à la dérivée.

• On calculer les images des bornes de l'intervalle I donné (il s'agit chaque fois d'un intervalle fermé borné).
On en déduit le maximum et le minimum global de *f* sur I. On peut éventuellement dresser le tableau de variations de *f* uniquement sur I.
« Le maximum global de *f* sur I est … ; le minimum global de *f* sur I est … ».

• On conclut par le meilleur encadrement demandé : « Le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\text{I}$ est $\ldots.\leqslant f(x)\leqslant\ldots.$ ».

Il est important de retenir la rédaction qui est proposée (notamment pour le maximum global et le minimum global).

Conseil :

• On vérifie les variations sur la calculatrice graphique.

• Éventuellement, on peut utiliser la commande de la calculatrice permettant de déterminer le maximum et le minimum (global dans chaque cas) d'une fonction sur un intervalle fermé borné.

1°) **$f : x\mapsto -x^3-2x^2+4x+3$; $\text{I}=[-3\,;1]$**

Déterminons le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in\text{I}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-3x^2-4x+4$

Le polynôme $-3x^2-4x+4$ a pour racines $\dfrac{2}{3}$ et – 2.

x	$-\infty$		-3		-2		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		–		–	0	+	0	–		–	
Variations de f		↘	0	↘	-5	↗	$\frac{121}{27}$	↘	4	↘	

On calcule les valeurs des extremums locaux de *f* sur $\mathbb{R}$:

$f(-2)=-5$ (minimum local d'après le tableau de variations)

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{121}{27}$ (minimum global d'après le tableau de variations)

On calcule ensuite les images des bornes de l'intervalle I :

$f(-3)=0$

$f(1)=4$

D'après la calculatrice, $\dfrac{121}{27}=4,4814814...$

Le minimum global de *f* sur I est égal à – 5 et le maximum global de *f* sur I est égal à $\dfrac{121}{27}$.

Il s'agit bien cette fois d'extremum globaux sur l'intervalle I et non d'extremums globaux.

On en déduit que le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$ est : $\boxed{-5\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{121}{27}}$.

2°) $\boldsymbol{f : x \mapsto 2x^3-9x^2+12x+1}$ **;** $\mathbf{I=[0\,;6]}$

Déterminons le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f\,'(x)=6\left(x^2-3x+2\right)$

$f\,'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 (racine évidente) et 2 (obtenue par produit).

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $f\,'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de *f*		↗	6	↘	5	↗	

$f(0)=1$
$f(6)=181$

Le minimum global de *f* sur I est égal à 1 et le maximum global de *f* sur I est égal à 181.

On en déduit que le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$ est : $\boxed{1\leqslant f(x)\leqslant 181}$.

3°) $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{9}{x}+x-1}$ **;** $\mathbf{I=[1\,;4]}$

Déterminons le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f\,'(x)=-\dfrac{9}{x^2}+1=1-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2-9}{x^2}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$

La mise au même dénominateur est obligatoire pour l'étude du signe.
En revanche, la factorisation de x^2-9 ne l'est pas.

Dans le tableau ci-dessous, il faudrait faire plusieurs lignes avant d'écrire la ligne du signe de $f\,'(x)$.
(SGN de $x-3$, SGN de $x+3$ et SGN de $(x+1)^2$ …)

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
SGN de $f\,'(x)$		+	0	–	‖	–	0	+	
Variations de *f*		↗	-7	↘	‖	↘	5	↗	

$f(1)=9$
$f(4)=\dfrac{21}{4}$

Le minimum global de *f* sur I est égal à 5 et le maximum global de *f* sur I est égal à 9.

On en déduit que le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$ est : $\boxed{5\leqslant f(x)\leqslant 9}$.

4°) $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}}$ **;** $\mathbf{I=[1\,;8]}$

Déterminons le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad f\,'(x)=\dfrac{-x^2-2x+4}{(x+1)^2}$

Dans le tableau ci-dessous, il faudrait faire plusieurs lignes avant d'écrire la ligne du signe de $f\,'(x)$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		-1		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
SGN de $f\,'(x)$		–	0	+	‖	+	0	–	
Variations de *f*		↘	$5+2\sqrt{5}$	↗	‖	↗	$5-2\sqrt{5}$	↘	

D'après la calculatrice, $-1+\sqrt{5}=1,236...$

$f(1)=\dfrac{-1^2+3\times 1-1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$f(8)=\dfrac{-8^2+3\times 8-1}{8+1}=-\dfrac{41}{9}$

Le minimum global de *f* sur I est égal à $-\dfrac{41}{9}$ et le maximum global de *f* sur I est égal à $5-2\sqrt{5}$.

On en déduit que le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$ est : $\boxed{-\dfrac{41}{9}\leqslant f(x)\leqslant 5-2\sqrt{5}}$.

Complément pour le 4°) : calcul des extremums

On considère une fonction *f* définie par $f=\dfrac{u}{v}$ où *u* et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que *v* ne s'annule pas sur I.

On a alors $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Si $f'(a)=0$, alors $u'(a)v(a)-u(a)v'(a)=0$.

Donc sous réserve d'existence des dénominateurs, on a : $\boxed{f(a)=\dfrac{u(a)}{v(a)}=\dfrac{u'(a)}{v'(a)}}$.

Ici, $u(x)=-x^2+3x-1$

$v(x)=x+1$

$u'(x)=-2x+3$

$v'(x)=1$

$$f\left(-1+\sqrt{5}\right)=\frac{u\left(-1+\sqrt{5}\right)}{v\left(-1+\sqrt{5}\right)}=\frac{u'\left(-1+\sqrt{5}\right)}{v'\left(-1+\sqrt{5}\right)}=\frac{-2\left(-1+\sqrt{5}\right)+3}{1}=5-2\sqrt{5}$$

Dans les exercices d'optimisation, on dit toujours ce que l'on cherche : maximum ou minimum autrement dit si l'on cherche à maximiser ou à minimiser une grandeur.

21 Problème d'optimisation

Il s'agit d'un problème d'optimisation dans l'espace.

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace serait intéressante pour ce type d'exercice.

Il est important de se souvenir que $x\in[0\,;10]$ comme cela est dit dans l'énoncé.

Refaire la figure comme c'est demandé !
On pensera à bien respecter les conventions des tracés en pointillés pour les arêtes cachées.

1°) **Exprimons V(*x*) en fonction de *x*.**

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(x)&=\mathrm{AM}\times\mathrm{AQ}\times\mathrm{AN}\\&=x\times x\times(10-x)\\&=x^2\times(10-x)\end{aligned}$$

2°) **Déterminons pour quelle valeur de *x* le volume de AMRQNPTS est maximal.**

On cherche le maximum de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 10].
Pour cela, on étudie les variations de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 10].
On va utiliser la dérivée.

V est dérivable sur l'intervalle [0 ; 10] comme fonction polynôme.

$\forall x\in[0\,;10]$ $\quad \mathrm{V}'(x)=2x\times(10-x)+x^2\times(-1)$ (nous appliquons la formule de dérivation d'un produit)

$\qquad =x(20-3x)$

On aurait aussi pu développer $\mathrm{V}(x)$ et dériver l'expression développée mais cela conduit à plus de calculs.

x	0		$\dfrac{20}{3}$		10
SGN de x		$+$		$+$	
SGN de $20-3x$		$+$	0	$-$	
SGN de $V'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de V	0	$\nearrow$	$\dfrac{4000}{27}$	$\searrow$	0

Calcul du maximum :

$$V\left(\frac{20}{3}\right)=\left(\frac{20}{3}\right)^2\times\left(10-\frac{20}{3}\right)$$ (nous avons remplacé x par $\frac{20}{3}$ dans l'expression de V)

$$=\frac{4000}{27}$$

[Avec la calculatrice, on trouve $V\left(\frac{20}{3}\right)=148{,}148\underline{148}\ldots$]

Conclusion :

Le volume du parallélépipède AMRQNPTS est maximal pour $x=\dfrac{20}{3}$.

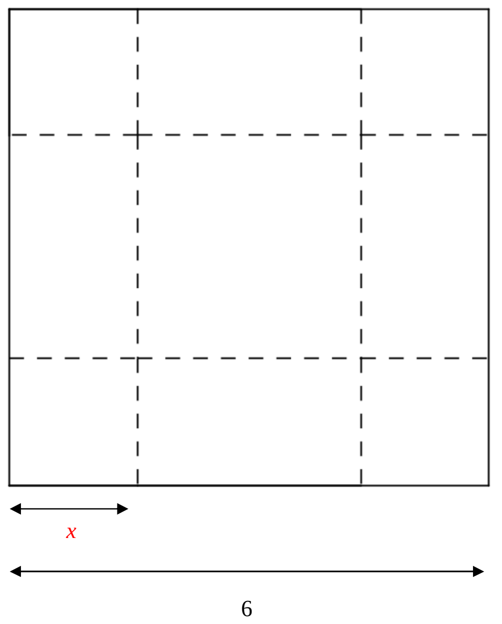
$\boxed{22}$ **Problème d'optimisation (problème de boîte sans couvercle, boîte parallélépipédique à base carrée)**

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace serait intéressante pour ce type d'exercice.

La première chose à faire est de faire une figure.

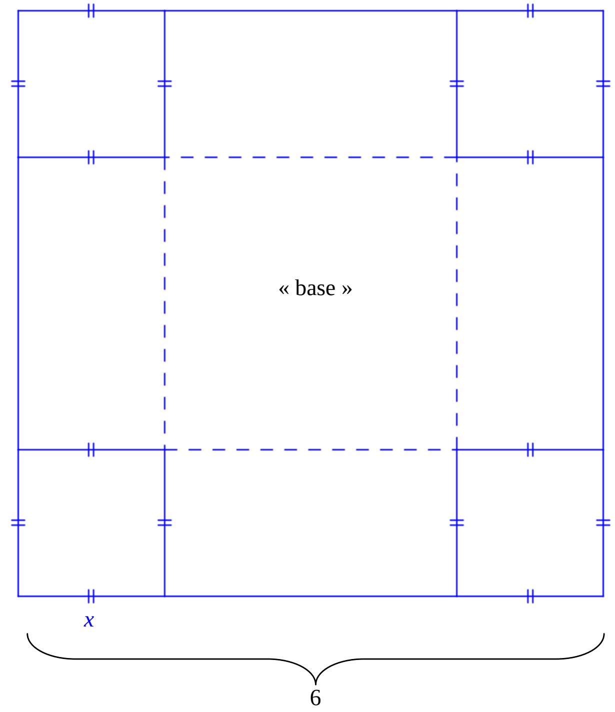
Faire une figure avec les traces de pliage.

On marque les codages correspondants aux longueurs égales et on dessine les pointillés correspondants aux traits de pliage (faire une figure avec les traits de pliage).



Le 12-1-2017

Remarque : Dans un patron, il y a toujours des pliages.



À la limite, on pourrait faire le patron de la boîte dans du papier un peu fort (on fait d'abord en sorte d'avoir une feuille carrée) et le découper.

On jette tous les coins du « carré ».

1°) **Exprimons les dimensions et le volume de la boîte en fonction de *x*.**

Les trois dimensions de la boîte en dm sont :

6 – 2*x*

6 – 2*x*

x

(Mieux vaut ne pas employer les mots « longueur », « largeur », « hauteur » pour un pavé droit.)

- Largeur : 6 – 2
- Longueur : 6 – 2*x*
- Hauteur : *x*

Le volume de la boîte est donné par $\mathbf{V(x)=(6-2x)^2\times x}$.

2°) **Cherchons pour quelle valeur de *x* le volume de la boîte est maximal.**

On cherche le maximum de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 3].
Pour cela, on étudie les variations de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 3].
On va utiliser la dérivée.

Pour calculer la dérivée, on peut développer l'expression de V mais c'est bien (mieux) de le faire sans développer à partir de la forme factorisée donnée à la question 1°).

V est dérivable sur l'intervalle [0 ; 3] comme fonction polynôme.

$$\forall x \in [0\,;3] \qquad \begin{aligned} V'(x) &= 2\times(-2)\times(6-2x)\times x+(6-2x)^2\times 1 \;* \\ &=(6-2x)\times(-4x+6-2x) \\ &=(6-2x)\times(6-6x) \\ &=2(3-x)\times 6(1-x) \\ &=12(3-x)(1-x) \end{aligned}$$

* Nous appliquons la formule de dérivation d'un produit.
On doit donc dériver la fonction $x \mapsto (6-2x)^2$ (principe de « sous-dérivée » c'est-à-dire de dérivée dans la dérivée)
On utilise la formule de dérivation $(u^2)'=2uu'$.

On aurait aussi pu développer $V(x)$ mais cela donne davantage de calculs.

$u(x)=(6-2x)^2$	$v(x)=x$
$u'(x)=2\times(6-2x)\times(-2)$	$v'(x)=1$
$u'(x)=-4(6-2x)$	

Explication plus détaillée :

$V(x)=x(6-2x)^2$

Pour calculer la dérivée, on ne peut pas isoler le *x* en tant que *k* (ce n'est pas une fonction du type « *ku* »).

• Travail préparatoire :

On analyse la forme de $V(x)$. C'est un produit.

$V=uv$ avec $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto (6-2x)^2$

$u'(x)=1$ et $v'(x)=2(6-2x)\times(-2)$

$V=uv$

$V'=u'v+uv'$

• Calcul à écrire :

On n'écrit pas la formule utilisée. En revanche, la première ligne comporte la trace de la formule de dérivation utilisée.

$V'(x)=1\times(6-2x)^2+x\times 2\times(6-2x)\times(-2)$
$V'(x)=(6-2x)\times(6-2x-4x)$
$V'(x)=(6-2x)\times(6-6x)$
$V'(x)=2(3-x)\times 6(1-x)$ (on « sort » le 2 du premier facteur et on « sort » le 6 du deuxième facteur)
$V'(x)=12(3-x)(1-x)$

Remarque :

Une autre forme de la dérivée est $V'(x)=12(x-3)(x-1)$.

x	0		1		3
SGN de $3-x$		$+$		$+$	
SGN de $1-x$		$+$	0	$-$	
SGN de $V'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de V	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Calcul du maximum global de V sur l'intervalle $[0\,;3]$: $V(1)=16$

Conclusion :

Le volume de la boîte est maximal pour $\boldsymbol{x=1}$.
Dans ce cas, il vaut 16 dm^3.

3°) **Déterminons à l'aide de la calculatrice les valeurs décimales approchées d'ordre 3 par défaut des valeurs de x pour lesquelles le volume de la boîte est égal à 10 dm^3.**

On doit résoudre l'équation $V(x)=10 \quad (1)$ avec $x\in[0\,;3]$.

(1) s'écrit $x(6-2x)^2=10$.

Si on développe le premier membre, on obtient l'équation $x\left(4x^2-24x+36\right)=10$ qui est équivalente à $4x^3-24x^2+36x-10=0$.

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 3.
On ne sait pas la résoudre de manière exacte donc on va utiliser une résolution approchée à l'aide de la calculatrice.

On utilise l'application de résolution des équations polynomiales de la calculatrice.

On trouve $x_1=0,3582164\ldots$ et $x_2=1,831745\ldots$ (pour la troisième solution x_3, non retenue, on obtient $x_3=3,8100\ldots$).

Autre méthode :
On trace la représentation graphique de la fonction V sur l'écran de la calculatrice.
On trace également la représentation graphique de la fonction $x\mapsto 10$.
On utilise une bonne fenêtre graphique (par exemple, $\text{X}\min=0$, $\text{X}\max=4$, $\text{Y}\min=0$, $\text{Y}\max=18$).

On cherche les abscisses des points d'intersection des deux représentations graphiques (faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ 5 : intersect).

On observe deux points d'intersection dont les abscisses x_1 et x_2 appartiennent à l'intervalle $[0\,;3]$ (on observe un troisième point d'intersection mais son abscisse x_3 n'est pas dans l'intervalle $[0\,;3]$).

On fait deux fois la démarche.

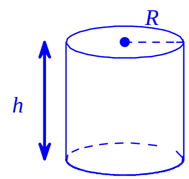
On trouve $x_1=0,3582164\ldots$ et $x_2=1,831745\ldots$ (pour la troisième solution x_3, non retenue, on obtient $x_3=3,8100\ldots$).

Les deux solutions que l'on conserve sont les deux premières car elles appartiennent à l'intervalle [0 ; 3].

Il s'agit de nombres irrationnels (on peut le démontrer aisément avec des résultats de Terminale spécialité).

$\boxed{23}$ Boîte de conserve (problème d'optimisation)

L'objet de cet exercice est la résolution d'un problème d'optimisation relié à une situation concrète.



1°) **Démontrons que $\pi R^2 h=1$.**

On sait que le volume de la boîte est égal à 1 dm^3.
Donc $\pi R^2 h=1$ (1) (cf. formule du volume d'un cylindre de révolution).

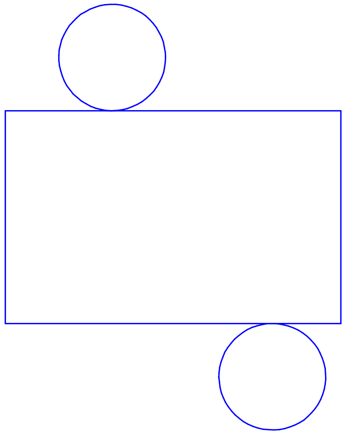
2°) Exprimons S en fonction de R.

L'aire totale d'un cylindre est la somme de l'aire de la surface latérale et des aires des deux disques (ce que l'on voit sur un patron).

Faire le patron du cylindre à la règle.

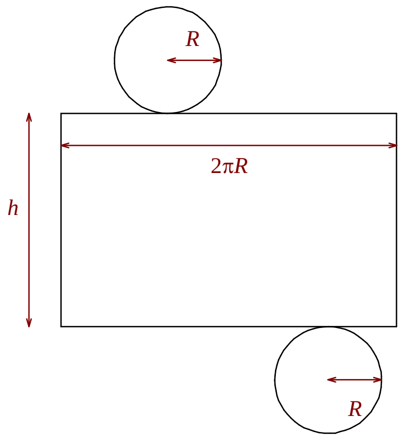
aire totale d'un cylindre de révolution = aire latérale + aire des deux disques

Faire une figure.



Sur un patron, la surface latérale est représentée par un rectangle.

Pou bien comprendre, il faut compléter le patron avec les mesures.



On doit calculer l'aire S du patron.

Cette aire est égale à la somme de l'aire latérale représentée sur le patron par un rectangle et par la somme des aires des deux disques de base.

On a : $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

(1) donne $\pi Rh \times R = 1$ d'où $\pi Rh = \dfrac{1}{R}$.

On en déduit :

$$\boxed{S = \frac{2}{R} + 2\pi R^2}$$

3°)

● Déterminons *R* pour que *S* soit minimale.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x} + 2\pi x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 4\pi x$

$$= \frac{2\left(2\pi x^3 - 1\right)}{x^2}$$

On cherche x tel que $2\pi x^3 - 1 = 0$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$x^3 = \dfrac{1}{2\pi}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ ($\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ désigne la racine cubique de $\dfrac{1}{2\pi}$)

$x = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2\pi}}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$

La valeur exacte de la valeur charnière est égale à $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ (on peut obtenir le début de l'écriture décimale de la racine cubique de 2π grâce à la calculatrice).

À l'aide de la calculatrice, on peut donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = 0{,}541926070...$

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$		$+\infty$
Signe de $2\pi x^3 - 1$		$-$	0^{num}	$+$	
Signe de x^2	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f	$\Vert$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, on peut voir que f admet un minimum global sur $]0\,;+\infty[$ atteint pour $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

On en déduit que S est minimale pour $R = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Avec les limites en 0 et en + infini, on pourrait voir que f n'admet pas de maximum global sur $]0\,;+\infty[$.

● Démontrons qu'alors $h = 2R$.

$R = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ d'où $R^3 = \dfrac{1}{2\pi}$ donc $2\pi R^3 = 1$.

Par conséquent, $h = \dfrac{1}{\pi R^2} = \dfrac{2R \times 1}{2R \times \pi R^2}\ \dfrac{2R}{2\pi R^3} = \dfrac{2R}{1} = 2R$

On peut multiplier le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même réel non nul.

La hauteur de la boîte est égale au double du rayon du disque de base c'est-à-dire au diamètre.
On peut vérifier cette propriété sur des boîtes de conserve ordinaires.