TS1

Contrôle du jeudi 15 décembre 2011 (1 h 30)

I. (1 point)

Soit z un nombre complexe quelconque non nul.

Démontrer que l'on a : $\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}-\frac{\overline{1+z}}{\overline{z}}=\overline{z}-1$.

II. (1 point)

On admet que $(2+\mathrm{i})^4=-7+24\mathrm{i}$ (on ne demande pas de vérifier cette égalité).

<u>À l'aide de cette égalité</u>, donner l'écriture algébrique de $(\mathrm{i}-2)^4$. Détailler la démarche.

III. (3 points)

On considère le polynôme $P(z)=z^3+5z^2+11z+15$ où z est un nombre complexe.

1°) a) Calculer $P(-3)$ (le détail du calcul n'est pas demandé sur la copie).

b) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait : $P(z)=(z+3)(z^2+az+b)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ (E).

IV. (5 points) *Un effort particulier de rédaction est demandé pour cet exercice.*

On considère l'équation différentielle $y'-2y=\mathrm{e}^{2x}$ (E).

1°) Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle $y'-2y=0$ (E_0).

3°) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que : (v est solution de (E)) $\Leftrightarrow$ ($v-u$ est solution de (E_0)).

En déduire toutes les solutions de (E).

4°) Déterminer la fonction, solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

Dans les exercices V et VI, aucune rédaction ni aucune explication ne sont demandées.

V. (2 points)

Une assemblée de 15 hommes et de 12 femmes veut élire un comité de 6 membres.
Mme A refuse de siéger dans tout comité dont ferait partie M.B.

1°) Combien de comités peut-on constituer dans ces conditions ?
2°) Dénombrer ceux de ces comités dont Mme A ferait partie.

VI. (4 points) On donnera les résultats de cet exercice dans un tableau.

Une urne contient :
- quatre boules rouges marquées A, B, C, D ;
- quatre boules blanches marquées A, B, C, D ;
- quatre boules noires marquées A, B, C, D.

1°) On tire **simultanément** quatre boules dans l'urne.

a) Déterminer le nombre N de tirages possibles.
b) Déterminer le nombre N_1 de tirages unicolores.
c) Déterminer le nombre N_2 de tirages bicolores.
d) En déduire le nombre N_3 de tirages tricolores.

2°) On tire **successivement** quatre boules dans l'urne **sans remise**.

a) Déterminer le nombre N' de tirages possibles.
b) Déterminer le nombre N_1' de tirages unicolores.
c) Déterminer le nombre N_2' de tirages bicolores.
d) En déduire le nombre N_3' de tirages tricolores.

VII. (2 points)

Soit n un entier naturel (on suppose que $n \geqslant 2$ pour S').

Donner une expression simplifiée en fonction de n les sommes $S = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{3^{n-p}}{4^p}$ et $S' = \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} 5^p$.

VIII. (2 points) Démonstration de cours : la formule de Pascal

Soit n et p deux entiers naturels tel que $p < n$. Démontrer que l'on a : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Bonus :

On se propose de refaire la démonstration de cette formule sans faire de calcul.
On considère un ensemble E de cardinal $n+1$ (c'est-à-dire à $n+1$ éléments). Soit a un élément fixé de E.
Exprimer sous forme de coefficients du binôme le nombre de parties de E à $p+1$ éléments :
• total ; • ne contenant pas a ; • contenant a.

Retrouver ensuite la formule de Pascal.

Corrigé du contrôle du 15-12-2011

I.

$z \in \mathbb{C}^*$

Démontrons que : $\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)} - \frac{\overline{1+z}}{\bar{z}} = \bar{z} - 1$.

On pose $\mathrm{A} = \overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)} - \frac{\overline{1+z}}{\bar{z}}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \\ &= \bar{z} - 1\end{aligned}$$

II.

$(\mathrm{i}-2)^4 = (2-\mathrm{i})^4$ (car l'exposant 4 est pair)

$= \left(\overline{2+\mathrm{i}}\right)^4$

$= \overline{(2+\mathrm{i})^4}$ (propriété du conjugué d'une puissance)

$= \overline{-7+24\mathrm{i}}$ (on utilise l'égalité donnée dans l'énoncé)

$= -7-24\mathrm{i}$

III.

$P(z) = z^3 + 5z^2 + 11z + 15$

1°) a) $P(-3) = 0$

b) Déterminons deux réels a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = (z+3)(z^2 + az + b)$.

Posons $Q(z) = (z+3)(z^2 + az + b)$.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad Q(z) = z^3 + (a+3)z^2 + (b+3a)z + 3b$

On identifie les coefficients avec ceux du polynôme $P(z)$.

On obtient le système $\begin{cases} a+3=5 \\ b+3a=11 \\ 3b=15 \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$.

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{C}$ $\boxed{P(z)=(z+3)(z^2+2z+5)}$.

2°) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ (E).

$$\begin{aligned} (\text{E}) &\Leftrightarrow (z+3)(z^2+2z+5)=0 \\ &\Leftrightarrow z+3=0 \text{ ou } z^2+2z+5=0 \\ &\Leftrightarrow z=-3 \text{ ou } z^2+2z+5=0 \end{aligned}$$

Considérons le trinôme de second degré z^2+2z+5 à coefficients réels.

Son discriminant réduit est égal à $\Delta'=-4$.

Le trinôme admet donc deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$: $z_1=-1+2\text{i}$ et $z_2=-1-2\text{i}$.

L'ensemble des solutions de (E) est : $S=\{-3\,;-1+2\text{i}\,;-1-2\text{i}\}$.

IV. Résolution d'une équation différentielle avec second membre

$y'-2y=\text{e}^{2x}$ (E)

1°) Vérifions que la fonction u définie par $u(x)=x\text{e}^{2x}$ est une solution particulière de (E).

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} u'(x) &= 1\times\text{e}^{2x}+x\times 2\text{e}^{2x} \\ &= \text{e}^{2x}+2x\times\text{e}^{2x} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} u'(x)-2u(x) &= \text{e}^{2x}+2x\text{e}^{2x}-2x\text{e}^{2x} \\ &= \text{e}^{2x} \end{aligned}$$

Donc la fonction u est une solution particulière de (E).

2°) Résolvons l'équation différentielle $y' - 2y = 0 \quad (\mathrm{E}_0)$.

L'équations différentielle (E_0) est équivalente à $y' = 2y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = 2$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{2x} \quad (k \in \mathbb{R})$.

v est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que v est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow v - u$ est solution de (E_0).

$$\begin{aligned}
v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (v-u)'(x) - 2(v-u)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) - u'(x) - 2v(x) + 2u(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) - 2v(x) = \mathrm{e}^{2x} \\
&\Leftrightarrow v \text{ est solution de } (\mathrm{E})
\end{aligned}$$

Déduisons-en les solutions de (E).

$$\begin{aligned}
v \text{ est solution de } (\mathrm{E}) &\Leftrightarrow v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0) \\
&\Leftrightarrow v-u \text{ est définie par } (v-u)(x) = k\mathrm{e}^{2x} \quad (k \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad v(x) - u(x) = k\mathrm{e}^{2x} \quad (k \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad v(x) = u(x) + k\mathrm{e}^{2x} \quad (k \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad v(x) = x\mathrm{e}^{2x} + k\mathrm{e}^{2x} \quad (k \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x\mathrm{e}^{2x} + k\mathrm{e}^{2x}$.

4°) Déterminons la fonction, solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

On cherche le réel k tel que $v(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 0 \times \mathrm{e}^{2\times 0} + k\mathrm{e}^{2\times 0} = 1 \\
&\Leftrightarrow k = 1
\end{aligned}$$

Conclusion : La solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0 est la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}$.

V.

1°) **Combien de comités peut-on constituer dans ces conditions ?**

On effectue la différence entre le nombre de comités total (sans tenir compte de la condition) et du nombre total de comités dans lesquels Mme A et M. B sont ensemble.

$$\binom{27}{6}-\binom{25}{6}=296010-12650$$

$$\binom{27}{6}-\binom{25}{6}=283360$$

Il y a 283 360 comités possibles dans ces conditions.

2°) **Dénombrons ceux de ces comités dont Mme A ferait partie**.

$$\binom{1}{1}\times\binom{25}{5}=53\ 130$$

choix de Mme A   choix de deux autres personnes autres que Mme A et M. B

Il y a 53 130 comités dont Mme A ferait partie.

VI.

$$\text{Urne}\ \begin{cases}\text{- 4 boules rouges marquées A, B, C, D ;}\\ \text{- 4 boules blanches marquées A, B, C, D ;}\\ \text{- 4 boules noires marquées A, B, C, D.}\end{cases}$$

1°) On tire **simultanément** quatre boules dans l'urne.

a) Nombre de tirages possibles : $N=\binom{12}{4}=495$

b) Nombre de tirages unicolores : $N_1=\binom{4}{4}+\binom{4}{4}+\binom{4}{4}=3$

c) Nombre de tirages bicolores :

On procède par disjonction de cas.

Nombre de tirages bicolores formés de boules rouges et blanches : $\binom{4}{1}\times\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}+\binom{4}{3}\times\binom{4}{1}=68$

Nombre de tirages bicolores formés de boules blanches et noires : $\binom{4}{1}\times\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}+\binom{4}{3}\times\binom{4}{1}=68$

Nombre de tirages bicolores formés de boules rouges et noires : $\binom{4}{1}\times\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}+\binom{4}{3}\times\binom{4}{1}=68$

$N_2=3\times 68=204$

d) Nombre de tirages tricolores : $\begin{aligned}N_3&=N-N_1-N_2\\&=495-3-204\\&=288\end{aligned}$ (on raisonne par cas contraire)

2°) On tire **successivement** quatre boules dans l'urne **sans remise**.

On utilise le lien entre les tirages successifs sans remise et les tirages simultanés.

Pour obtenir tous les résultats de cette partie, on peut multiplier tous les résultats de la question 1°) par $4\,! = 24$.
En effet, dans la question 1°), on n'a pas tenu compte de l'ordre ; chaque résultat non ordonné donne par permutation un résultat ordonné. Or le nombre de permutations d'un ensemble à 4 éléments est égal à 4 ! c'est-à-dire 24.

a) Nombre de tirages possibles : $\text{N}' = 11880$

b) Nombre de tirages unicolores : $\text{N}_1' = 72$

c) Nombre de tirages bicolores : $\text{N}_2' = 4896$

d) Nombre de tirages tricolores : $\text{N}_3' = 6912$

Autre démarche possible pour les résultats des questions a) et b) :

a) Nombre de tirages possibles : $\text{N}' = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$

b) Nombre de tirages unicolores : $\text{N}_1' = 12 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$

Pour le c) et le d), une démarche directe est particulièrement difficile.

VII. Calculs de sommes

$$S = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{3^{n-p}}{4^p} \quad \text{(le signe } \times \text{ est sous-entendu)}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \times 3^{n-p} \times \frac{1}{4^p}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 3^{n-p} \times \left(\frac{1}{4}\right)^p$$

$$= \left(3 + \frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{(formule du binôme de Newton)}$$

$$= \left(\frac{13}{4}\right)^n$$

$$S' = \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} 5^p$$

$$= \left[\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \times 1^{n-p} \times 5^p\right] - \binom{n}{0} \times 5^0 - \binom{n}{1} \times 5^1$$

$$= (5+1)^n - 1 - 5n$$

$$= 6^n - 1 - 5n$$

VIII. Formule de Pascal : voir cours

Bonus :

$\text{card } E = n + 1$
L'énoncé rappelle le sens du mot « cardinal ».

Bonus :

• Nombre de parties de E à p + 1 éléments total : $\binom{n+1}{p+1}$

• Nombre de parties de E à p + 1 éléments ne contenant pas a : $\binom{n}{p+1}$

• Nombre de parties de E à p + 1 éléments contenant a. $\binom{n}{p}$

On en déduit la formule de Pascal : $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$.

Consignes orales :

- Résultats à encadrer
- Cartouche de présentation au début de la copie
- Barres de conjuguées et traits de fraction à la règle

Dans l’exercice sur les équations différentielles, il est important de quantifier.