TS1

Contrôle du samedi 3 décembre 2011 (2 h)

• Lire attentivement les consignes générales qui figurent sur la feuille à l'intérieur de l'énoncé.

• Des indications et des conseils pour la rédaction de certaines questions sont également donnés sur cette même feuille. Les questions concernées sont mentionnées dans l'énoncé par le sigle □.

I. (6 points) QCM

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Indiquer la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.
Répondre dans un tableau en écrivant sans rature les lettres correspondant aux réponses choisies.

Chaque réponse juste rapporte un point ; chaque réponse fausse enlève un point.
L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.

1°) Soit z un nombre complexe quelconque distinct de – i. On pose $Z=\dfrac{\mathrm{i}z+1}{\mathrm{i}z-1}$.

$\overline{Z}=\ldots$

A. $\dfrac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}z+1}$ B. $\dfrac{1-\mathrm{i}\overline{z}}{1+\mathrm{i}\overline{z}}$ C. $\dfrac{\overline{z}+\mathrm{i}}{\overline{z}-\mathrm{i}}$ D. $\dfrac{\mathrm{i}+\overline{z}}{\mathrm{i}-\overline{z}}$

2°) On considère l'équation $z^2=\mathrm{i}\overline{z}$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
Parmi les nombres complexes suivants, lesquels sont solutions de cette équation ?

A. $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$ B. i C. $\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$ D. – i

3°) L'équation $z^4+3z^2+2=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ a pour ensemble de solutions :

A. $\left\{\mathrm{i}\,;\,\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$ B. $\left\{-1\,;\,-2\right\}$ C. $\varnothing$ D. $\left\{\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\,;\,\mathrm{i}\sqrt{2}\,;-\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$

4°) Soit z un nombre imaginaire pur non nul distinct de – i et de – 1.
Parmi les nombres complexes suivants, lesquels sont imaginaires purs ?

A. $\mathrm{i}+\dfrac{1}{z}$ B. z^3 C. $\dfrac{\overline{z}}{z+\mathrm{i}}$ D. $(z+\mathrm{i})^2$

5°) Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes respectives z et $\mathrm{i}z^2$ où z est un nombre complexe.
Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont colinéaires pour $z=\ldots$

A. 0 B. $1+\mathrm{i}$ C. 2i D. – 1

6°) $\mathrm{i}^{2011}=\ldots$

A. 1 B. i C. i D. – i

II. (6 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.
On note A le point d'affixe 1 et on pose $P^*=P\setminus\{\mathrm{A}\}$.

On note f l'application de P^* dans P qui à tout point M de P^*, d'affixe $z\neq1$, fait correspondre le point M' d'affixe $z'=\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}$.

Partie 1

On note B le point d'affixe $1+2\mathrm{i}$.

1°) Déterminer l'affixe du point B', image de B par f (on peut noter $f(\mathrm{B})=\mathrm{B}'$). □
Placer B' sur le graphique.

2°) Déterminer l'affixe du point C, antécédent de B par f (C est le point tel que $f(\mathrm{C})=\mathrm{B}$).
Placer C sur le graphique.

Partie 2

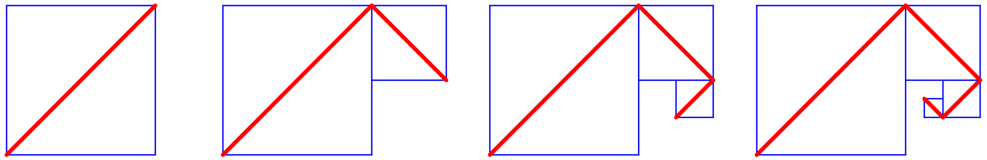
1°) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et de y. □

2°) Déterminer et tracer l'ensemble E des points M de P d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur. □

III. (3 points)

On construit une spirale en disposant bout à bout les diagonales d'une suite de carrés, comme le montrent les figures ci-dessous.
À l'étape 1, le côté du carré est égal à 1, puis à chaque étape, le côté du carré est divisé par 2.

Étape 1 **Étape 2** **Étape 3** **Étape 4**



On poursuit ainsi la construction de la spirale.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, à l'étape *n*, on note C_n le côté du carré que l'on rajoute et ℓ_n la longueur de la spirale obtenue.

1°) Recopier et compléter la phrase suivante sans justifier :

« La suite (C_n) est une suite géométrique de raison ……………………….. . »

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\ell_n = 2\sqrt{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

3°) Déterminer à partir de quelle étape *n* on a : $2\sqrt{2} - \ell_n \leqslant 10^{-10}$.

IV. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 1$.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n* (sous la forme d'un seul quotient).

Bonus

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \overline{z} = a$ où *a* est un réel donné.

Discuter suivant les valeurs de *a*.

Consignes générales

- Ne rien écrire sur l'énoncé.

- À la fin du contrôle, garder l'énoncé.

- Avant de rédiger la solution aux questions, faire une recherche au brouillon pour chaque question afin de proposer une solution propre et sans rature sur la copie (et si possible claire et concise !).

- Rédiger sans utiliser d'abréviations en faisant attention à l'orthographe.

- Il est demandé de bien mettre en évidence tous les résultats en les encadrant en rouge à la règle.

Conseils et aides pour la rédaction

II.

Partie 1

1°) Commencer « sèchement » le calcul :

$z_{B'} = \ldots$

$= \ldots$

$= \ldots$

en écrivant seulement les grandes étapes du calcul (une seule ligne à chaque fois).

Partie 2

1°) Cette question demande une bonne organisation des calculs.
Il est conseillé de commencer par chercher l'écriture algébrique de $\dfrac{z-\text{i}}{z-1}$ avant de chercher celle de z'.
On effectuera les calculs au brouillon (prendre la feuille papier dans l'autre sens pour faire les calculs).

Sur la copie, on pourra n'indiquer que les principales étapes du calcul. Tirer les traits à la règle pour les quotients.

2°) Rédiger selon le modèle suivant.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 1$.

On pose $z = x + \text{i}y$ où x et y sont deux réels.

$\text{M} \in E \Leftrightarrow z' \in \text{i}\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ …………….

$\Leftrightarrow$ …………….

Conclusion : L'ensemble E est ….

IV.

1°) **Quelques rappels de la rédaction pour une récurrence.**

Début :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

… / …

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire ………………………….
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire ………………………………………..

… / …

Conclusion : …

Remarque valable pour les exercices III et IV (notation d'une suite).

La suite (u_n) est notée avec des **parenthèses**.

Corrigé du contrôle du 3-12-2011

I.

1°) $Z=\dfrac{\mathrm{i}z+1}{\mathrm{i}z-1}$ $(z\neq -\mathrm{i})$

$\overline{Z}=\overline{\left(\dfrac{\mathrm{i}z+1}{\mathrm{i}z-1}\right)}$

$=\dfrac{\overline{\mathrm{i}z+1}}{\overline{\mathrm{i}z-1}}$ (on utilise la propriété : « Le conjugué d'un quotient est égal au quotient des conjugués »)

$=\dfrac{-\mathrm{i}\overline{z}+1}{-\mathrm{i}\overline{z}-1}$ (on applique les propriétés du conjugué d'une somme et du conjugué d'un produit)

$=\dfrac{\mathrm{i}\overline{z}-1}{\mathrm{i}\overline{z}+1}$ (on multiplie le numérateur et le dénominateur par – 1)

$=\dfrac{\mathrm{i}\left(\overline{z}-\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right)}{\mathrm{i}\left(\overline{z}+\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right)}$

$=\dfrac{\overline{z}-\dfrac{1}{\mathrm{i}}}{\overline{z}+\dfrac{1}{\mathrm{i}}}$

$=\dfrac{\overline{z}+\mathrm{i}}{\overline{z}-\mathrm{i}}$

Réponse C

2°) $z^2=\mathrm{i}\overline{z}$ $(z\in\mathbb{C})$

Il n'y a pas d'autre méthode que de prendre chaque nombre et de vérifier si ces nombres sont solutions (résoudre l'équation aurait été plus long).

• Pour $z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$:

$z^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^2=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^2}{4}=\dfrac{3+2\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{4}=\dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{i}\overline{z}=\mathrm{i}\times\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}+1}{2}$

Donc $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$ est solution de l'équation.

• Pour $z=\mathrm{i}$:

$z^2=\mathrm{i}^2=-1$

$\mathrm{i}\,\overline{z}=\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})=1$

Donc i n'est pas solution de l'équation.

• Pour $z=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$:

$z^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\right)^2=\dfrac{\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^2}{4}=\dfrac{3-2\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{4}=\dfrac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{i}\overline{z}=\mathrm{i}\times\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{2}$

Donc $\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$ n'est pas solution de l'équation.

• Pour $z=-\mathrm{i}$:

$z^2=(-\mathrm{i})^2=-1$

$\mathrm{i}\overline{z}=\mathrm{i}\times\mathrm{i}=-1$

Donc – i est solution de l'équation.

Réponses A et D

3°) $z^4+3z^2+2=0$ $(z\in\mathbb{C})$

Il s'agit d'une équation bicarrée (c'est une équation polynomiale du quatrième degré qui ne comporte pas de terme du premier et du troisième degré).

On pose $Z=z^2$ (changement d'inconnue).

L'équation s'écrit : $Z^2+3Z+2=0$.
On obtient ainsi une équation du second degré.
Cette dernière équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $Z_1=-1$ (racine évidente) et $Z_2=-2$ (obtenue par produit).

Donc $Z=-1$ ou $Z=-2$.

Or $Z=z^2$.

Donc $(1)\Leftrightarrow z^2=-1$ ou $z^2=-2$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\,;\mathrm{i}\sqrt{2}\,;-\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

Réponse D

4°) z est un nombre imaginaire pur non nul donc $z=\mathrm{i}b$ avec $b\in\mathbb{R}^*$.

On doit envisager toutes les expressions possibles.

• $\mathrm{i}+\dfrac{1}{z}=\mathrm{i}+\dfrac{1}{\mathrm{i}b}=\mathrm{i}-\dfrac{\mathrm{i}}{b}=\mathrm{i}\left(1-\dfrac{1}{b}\right)$

Or $1-\dfrac{1}{b}\in\mathbb{R}$ donc $\mathrm{i}+\dfrac{1}{z}$ est un imaginaire pur.

• $z^3=(\mathrm{i}b)^3=-\mathrm{i}b^3$ donc z^3 est un imaginaire pur.

• $\dfrac{\overline{z}}{z+\mathrm{i}}=\dfrac{\overline{\mathrm{i}b}}{\mathrm{i}b+\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}b}{(1+b)\mathrm{i}}=-\dfrac{b}{1+b}$

Comme $b\neq-1$ et $b\neq0$, $\dfrac{\overline{z}}{z+\mathrm{i}}$ est donc un réel non nul ; ce n'est donc pas un imaginaire pur.

• $(z+\mathrm{i})^2=(\mathrm{i}b+\mathrm{i})^2=\left[\mathrm{i}(b+1)\right]^2=\mathrm{i}^2(b+1)^2=-(b+1)^2$

Comme $b\neq-1$, $(z+\mathrm{i})^2$ est donc un réel non nul ; ce n'est donc pas un imaginaire pur.

Réponses A et B

5°) $\overrightarrow{w}(z)$; $\overrightarrow{w'}(\mathrm{i}z^2)$

Méthode : On envisage tous les cas pour les différentes valeurs de z proposées.

• Si $z=0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ ont tous les deux pour affixe 0.
Ils sont donc égaux au vecteur nul.
Or le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs (c'est une convention).
Donc si $z=0$, les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont colinéaires.

• Si $z=1+\mathrm{i}$, alors $\overrightarrow{w}(1+\mathrm{i})$ et $\overrightarrow{w'}(-2)$ car $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$.
Il n'existe pas de réel λ tel que $-2=\lambda(1+\mathrm{i})$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ ne sont pas colinéaires.

• Si $z=2\mathrm{i}$, alors $\overrightarrow{w}(2\mathrm{i})$ et $\overrightarrow{w'}(-4\mathrm{i})$ car $(2\mathrm{i})^2=-4$.
On constate que $\overrightarrow{w'}=-2\overrightarrow{w}$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont colinéaires.

• Si $z=-1$, alors $\overrightarrow{w}(-1)$ et $\overrightarrow{w'}(\mathrm{i})$.
On constate que $\overrightarrow{w'}=-2\overrightarrow{w}$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont colinéaires.

Conclusion : Pour $z=0$ ou $z=2\mathrm{i}$, les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont colinéaires.

Réponses A et C

6°) $\mathrm{i}^{2011}=\ldots$

1ère méthode :

$\mathrm{i}^{2010}=\left(\mathrm{i}^2\right)^{505}=(-1)^{505}=-1$

$\mathrm{i}^{2011}=-\mathrm{i}$

Réponse D

2e méthode :
$2011=4\times502+3$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}^{2011}&=\mathrm{i}^{4\times502+3}\\&=\left(\mathrm{i}^4\right)^{502}\times\mathrm{i}^3\\&=1^{502}\times(-\mathrm{i})\\&=-\mathrm{i}\quad\text{(réponse D)}\end{aligned}$$

II.

$\mathrm{A}(1)$

$P^*=P\setminus\{\mathrm{A}\}$

f : l'application de P^* dans P qui à tout point M de P^*, d'affixe $z\neq1$, fait correspondre le point $\mathrm{M'}$ d'affixe $z'=\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}$

Partie 1

$\mathrm{B}(1+2\mathrm{i})$

1°) Déterminer l'affixe du point $\mathrm{B'}$ image de B par f.

$$\begin{aligned}z_{\mathrm{B'}}&=\frac{(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}-\mathrm{i})}{1+2\mathrm{i}-1}\\&=\frac{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\\&=\frac{2}{2\mathrm{i}}\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}\\&=-\mathrm{i}\end{aligned}$$

$\mathrm{B'}$ a pour affixe $-\mathrm{i}$.

2°) Déterminons l'affixe du point C antécédent de B par *f*.

On doit résoudre l'équation $\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}=1+2\mathrm{i} \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow (1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})=(1+2\mathrm{i})\ (z-1)$

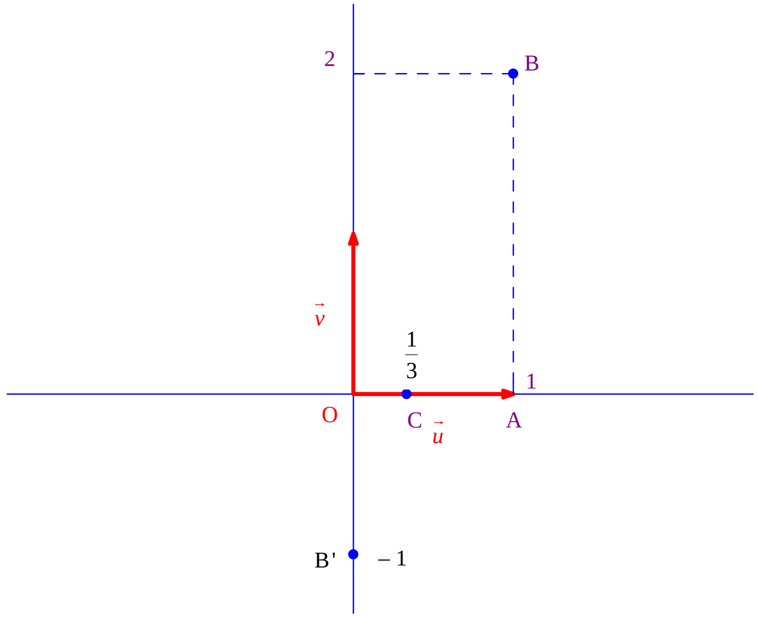
$\Leftrightarrow (1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=(1+2\mathrm{i})z-(1+2\mathrm{i})$

$\Leftrightarrow (1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}\ -1=(1+2\mathrm{i})z-1-2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow -3\mathrm{i}z=-\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1}{3}$

C a pour affixe $\dfrac{1}{3}$.



Question supplémentaire que j'aurais dû mettre et que j'ai oubliée :

Démontrer que les points B, C, B' sont alignés.

Partie 2

1°) Déterminons la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et de y.

$z\neq 1$

Rappel : Une écriture algébrique ne doit pas comporter de i au dénominateur.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$z'=\frac{(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y-\mathrm{i})}{x+\mathrm{i}y-1}$$

$$=\frac{(1-\mathrm{i})\left[x+\mathrm{i}(y-1)\right]}{(x-1)+\mathrm{i}y}$$

On commence par développer le produit figurant au numérateur $(1-\mathrm{i})\left[x+\mathrm{i}(y-1)\right]$.

$$=\frac{(x+y-1)+\mathrm{i}(-x+y-1)}{(x-1)+\mathrm{i}y}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur pour enlever les i au dénominateur.

$$=\frac{\left[(x+y-1)+\mathrm{i}(-x+y-1)\right]\left[(x-1)-\mathrm{i}y\right]}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{(x+y-1)(x-1)+y(-x+y-1)+\mathrm{i}\left[-y(x+y-1)+(-x+y-1)(x-1)\right]}{(x-1)^2+y^2}$$

On développe intelligemment le produit.

$$=\frac{x^2+y^2-2x-2y+1+\mathrm{i}\left(-x^2-y^2+1\right)}{(x-1)^2+y^2}$$

Conclusion :

$\operatorname{Re} z'=\dfrac{x^2+y^2-2x-2y+1}{(x-1)^2+y^2}$	$\operatorname{Im} z'=\dfrac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$

2[e] méthode :

On commence par chercher l'écriture algébrique de $\dfrac{z-\text{i}}{z-1}$.

On multiplie ensuite le résultat obtenu par 1 – i.

2°) Déterminons l'ensemble E des points M de P d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 1$.

On pose $z = x + \text{i}y$ où x et y sont deux réels.

$$
\begin{aligned}
\text{M} \in E &\Leftrightarrow z' \in \text{i}\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \text{Re}\, z' = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1
\end{aligned}
$$

La conclusion peut se formuler de deux façons :

E est le cercle de centre Ω de coordonnées $(1\,;1)$ et de rayon 1 privé du point A.

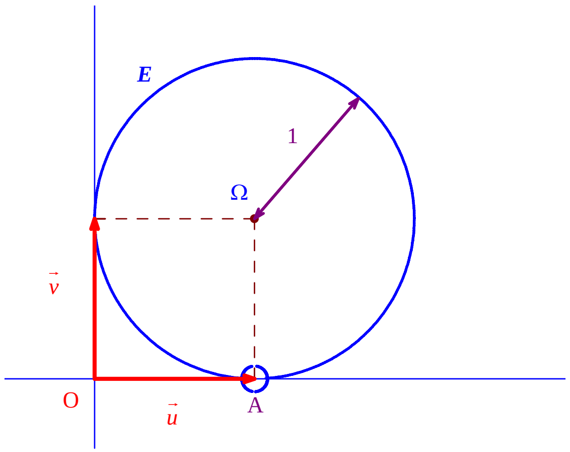
ou

$E = \mathcal{C} \setminus \{\text{A}\}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre Ω de coordonnées $(1\,;1)$ et de rayon 1.

On peut aussi dire que E est le cercle de diamètre [AB] privé de A.

On observe que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ car ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
Donc il faut priver $\mathcal{C}$ du point A.

Tracé de $\mathcal{C}$:



On peut observe que le cercle $\mathcal{C}$ est tangent en A à l'axe des abscisses et est tangent à l'axe des ordonnées ce qui se démontre aisément car la distance de Ω à chacun des axes est égale à 1 c'est-à-dire au rayon du cercle $\mathcal{C}$.

III.

1°) D'après l'énoncé, le côté de chaque carré (sauf le premier) est égal à la moitié du côté du carré précédent.

On en déduit que la suite (C_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

2°) Démontrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\ell_n = 2\sqrt{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

La diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$.

$\ell_n = \text{C}_1 \times \sqrt{2} + \text{C}_2 \times \sqrt{2} + \ldots + \text{C}_n \times \sqrt{2}$ (écriture de la somme en extension)

$= (\text{C}_1 + \text{C}_2 + \ldots + \text{C}_n) \times \sqrt{2}$ (on factorise l'expression par $\sqrt{2}$)

$$= \text{C}_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \times \sqrt{2}$$

(on applique la formule sommatoire pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique afin de donner une expression simplifiée de $\text{C}_1 + \text{C}_2 + \ldots + \text{C}_n$)

$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \times \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

3°) Déterminons à partir de quelle étape n on a : $2\sqrt{2} - \ell_n \leqslant 10^{-10}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leqslant 10^{-10}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-10}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-10}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-10}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{10^{-10}}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geqslant 2\sqrt{2}\times 10^{10}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geqslant 2\sqrt{2}\times 10^{10}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2^n \geqslant \ln\left(2\sqrt{2}\times 10^{10}\right)$$ (on compose par la fonction ln chaque membre de l'inégalité)

$$\Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln\left(2\sqrt{2}\times 10^{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(2\sqrt{2}\times 10^{10}\right)}{\ln 2}$$ (l'inégalité est dans le même sens car on a divisé les deux membres par ln 2 qui est strictement positif)

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 2+\ln\sqrt{2}+10\ln 10}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+10\ln 2+10\ln 5}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\frac{23}{2}\ln 2+10\ln 5}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{23}{2}+10\frac{\ln 5}{\ln 2}$$

D'après la calculatrice, $\frac{23}{2}+10\frac{\ln 5}{\ln 2}=$ 34,719 280 9…

Comme *n* est un entier naturel, on en déduit que l'étape *n* à partir de laquelle on a $2\sqrt{2}-l_n \leqslant 10^{-10}$ est **35**.

IV.

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2-\frac{1}{u_n} \end{cases}$$

1°) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 1$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 5$ par hypothèse de définition de la suite donc $u_0 > 5$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$.

On a : $u_k > 1$.

Donc $\frac{1}{u_k} < 1$ car la fonction « inverse » est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Par multiplication des deux membres par – 1, on obtient $-\frac{1}{u_k} > -1$ (changement de sens de l'inégalité car – 1 est strictement négatif).

En ajoutant 2 à chaque membre, on obtient $2-\frac{1}{u_k} > 1$ soit $u_{k+1} > 1$.

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

2°) $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

a) Démontrons que (v_n) est une suite arithmétique.

Méthode : On va démontrer que la différence $v_{n+1}-v_n$ est constante.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$= \dfrac{1}{\left(2 - \dfrac{1}{u_n}\right) - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$= \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{u_n - 1}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$= \dfrac{u_n}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$= \dfrac{u_n - 1}{u_n - 1}$

$= 1$

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{4}$ et de raison $r = 1$.

b) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{1}{4} + n$ (formule explicite du terme général d'une suite arithmétique)

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{4} + n \quad (1)$.

(1) donne successivement :

$u_n - 1 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{4} + n}$

$u_n - 1 = \dfrac{1}{\dfrac{1 + 4n}{4}}$

$u_n = \dfrac{1}{\dfrac{1 + 4n}{4}} + 1$

$u_n = \dfrac{4}{1 + 4n} + 1$

$u_n = \dfrac{5 + 4n}{1 + 4n}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{5 + 4n}{1 + 4n}$

Bonus

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \overline{z} = a \quad (\text{E})$ où a est un réel donné.

On pose $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels.
On a alors : $\overline{z} = x - \text{i}y$.

$(\text{E}) \Leftrightarrow (x + \text{i}y)^2 + (x - \text{i}y) = a$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x\text{i}y - y^2 + x - \text{i}y = a$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - y^2 + x} + \text{i}\boxed{y(2x - 1)} = a$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = a & (1) \\ y(2x - 1) = 0 & (2) \end{cases}$

On obtient un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui n'est pas linéaire.

On prend l'équation (2). On trouve soit y soit x. On remplace dans l'équation (1).

$(2) \Leftrightarrow y = 0$ ou $2x - 1 = 0$ (règle d'un produit de facteurs, c'est bien un « ou »)

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

1^er^ cas : $x = \dfrac{1}{2}$

Dans ce cas, l'équation (1) donne $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \dfrac{1}{2} = a$ soit $y^2 = \dfrac{3}{4} - a \quad (1')$.

• Si $a < \dfrac{3}{4}$, alors $(1') \Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{3}{4} - a}$ ou $y = -\sqrt{\dfrac{3}{4} - a}$

• Si $a = \dfrac{3}{4}$, alors $(1') \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

• Si $a > \dfrac{3}{4}$, alors $(1')$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $\dfrac{3}{4} - a < 0$.

2^e^ cas : $y = 0$

Dans ce cas, l'équation (1) donne $x^2 + x - a = 0$.

Considérons le polynôme $x^2 + x - a$ ($x \in \mathbb{R}$).

Attention, on considère un polynôme dont la variable est un réel car x est un réel.

Le discriminant du polynôme est égal à $\Delta = 1 - 4 \times (-a) = 1 + 4a$.

On discute suivant le signe de Δ.

• Si $a > -\frac{1}{4}$, alors $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

• Si $a = -\frac{1}{4}$, alors $\Delta = 0$ donc le polynôme admet une racine double dans $\mathbb{R}$.
$x_0 = -\frac{1}{2}$

• Si $a < -\frac{1}{4}$, alors $\Delta < 0$ donc le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Conclusion :

• Si $a < -\frac{1}{4}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{ \frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4} - a} \ ; \ \frac{1}{2} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4} - a} \right\}$.

• Si $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est
$S = \left\{ \frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4} - a} \ ; \frac{1}{2} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4} - a} \ ; \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \ ; \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} \right\}$.

• Si $a > \frac{3}{4}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \ ; \ \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} \right\}$.

• Si $a = -\frac{1}{4}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

• Si $a = \frac{3}{4}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.