Narration de recherche

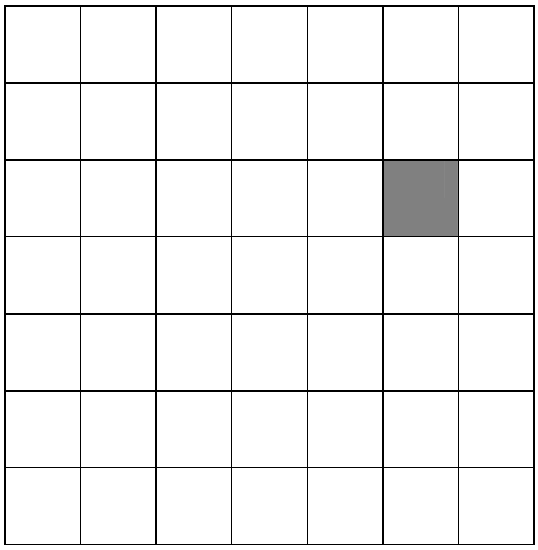
Les dominos

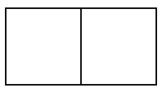
On considère une grille carrée de taille quelconque avec un « trou ».
Le trou peut se situer n'importe où, y compris sur un bord ou un coin de la grille.

Est-il possible de paver cette grille avec un trou à l'aide de dominos rectangulaires placés horizontalement ou verticalement (les dominos sont constitués de deux cases) ?

Exemple :

Voici le dessin pour une grille carrée de taille 7 et un cas particulier de la position du trou (case grisée).





Autre explication :

Le but est de remplir la grille, de la paver entièrement tout en laissant le trou découvert, à l'aide de dominos de 2 cases que l'on pose les uns à côtés des autres.
Les dominos ne doivent en aucun cas se superposer et toutes les cases doivent être recouvertes.

Vous devez raconter votre recherche explicitement et la solution trouvée doit être non seulement conjecturée mais également détaillée à l'aide d'exemples.
Expliquez clairement votre démarche.

Quelques consignes

Faites la recherche à deux ou à trois.

Rédigez la narration sur copie ou sur document tapé (dans ce dernier cas, rendre une version imprimée et envoyer le document par mail).

Joignez tous les documents utilisés à la copie.

Rédigez en bon français, sur un mode narratif.

À la fin de la narration, faites une conclusion en disant si vous avez aimé cette recherche et pourquoi (notamment ce que cette recherche vous a apporté).

Compte rendu de la narration de recherche

On s'appuie sur des exemples pour commencer.

- Aspect original du problème
- Aspect ludique mais sérieux du problème
- Caractère original et inhabituel du sujet
- Caractère déstabilisant car il semble qu'il ne fasse aucune connaissance acquise jusqu'à maintenant.
- Coloration en damier

On cherche les cas d'existence et de non existence.

On va noter n le nombre de cases carrés par rangées.

***n* pair :** impossible quelle que soit la place du trou.

***n* impair :** existence ou non existence selon la place du trou
Il y a donc une discussion à faire.

Étude :

1. Il s'agit d'un problème de pavage.

a) On commence par faire des essais pour des grilles carrées de plusieurs tailles.

On cherche sur des exemples (caractère expérimental de la recherche en mathématiques).

Sur la copie, on montre les exemples cherchés (du moins une partie).

b) Après plusieurs tentatives, les 2 **variables** (ou paramètres) du problème apparaissent naturellement :

• Nombre de cases (pair/impair)

• Position du trou

On va noter *n* le nombre de cases carrés par rangées.

2. On observe rapidement que lorsque ***n* est pair le problème** n'a pas de solution quelle que soit la place du trou.

On peut alors le **démontrer** aisément.

Si on prend pour unité d'aire un petit carré, on s'aperçoit que l'aire du domaine à paver sera mesurée par un entier impair ($n^2 - 1$). Or les dominos constitués par deux petits carrés ont une aire de 2 unités.

On peut donc formuler un premier partiel en utilisant les termes de la logique mathématique.

Une **condition nécessaire** pour que le problème ait une solution est que n soit impair.

Pour que le problème ait une solution, **il faut que** n soit impair.

Le but de la suite va être de voir si c'est une condition suffisante.

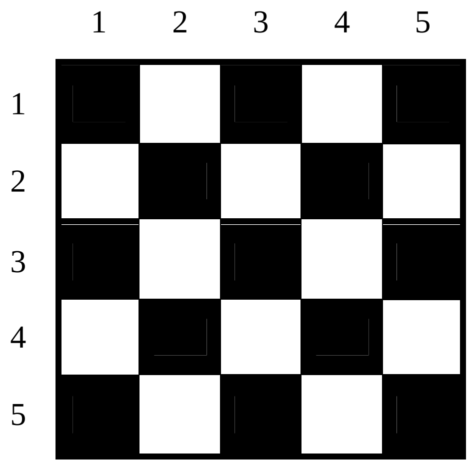
3. On va désormais étudier les grilles carrées avec ***n* impair.**

a) On peut regarder ce qui se passe pour $n = 5$.

Les différents essais effectués montrent que certaines positions du trou permettent de paver la figure par des dominos alors que pour d'autres positions on n'y arrive pas.

On obtient une grille carrée dans laquelle on peut colorier en noir les positions du trou pour lesquelles il y a une solution.

On obtient alors une coloration de la grille sous la forme suivante (« coloration en damier ») :



On voit assez facilement que :

- si le trou se situe sur l’une des cases noires on peut paver la figure par des dominos ;

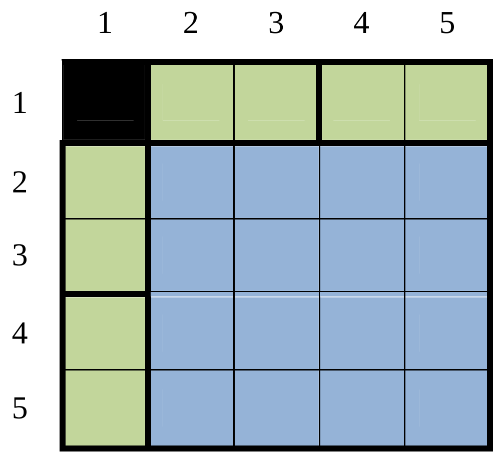
- si le trou se situe sur l’une des cases blanches alors on n’arrive pas à paver la figure par des dominos.

b) On peut recommencer pour d’autres tailles (d’autres valeurs de n impair).
On met en évidence toujours la même alternance de cases noires et blanches.
Il semble que l’on arrive donc à dégager une règle générale.
On ne peut se contenter de l’énoncer car les exemples ne constituent pas une démonstration.
Il va falloir chercher une démonstration.

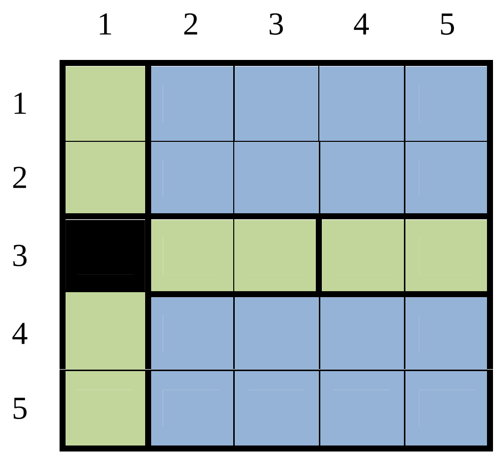
c) **Démonstrations**

• Démonstration de possibilité lorsque le trou se trouve sur une case noire

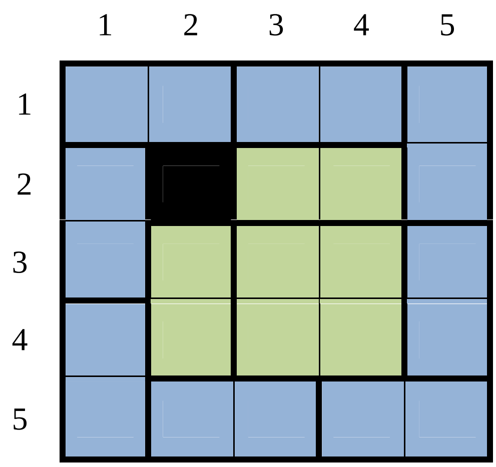
Lorsque le carré noir est en bordure, sa colonne et sa ligne sont composées d’un nombre de carrés multiple de 2 (vert) et on fait apparaître un carré composé d’un nombre de cases multiple de 2 (en bleu).



De même, ici deux rectangles composés d’un nombre de case multiple de 2 sont formé.



Lorsque le carré noir ne se trouve pas en bordure, on trace un carré (le vert) ; la règle précédente s’applique donc puis on pave le contour (en bleu).



Il s’agit d’une démonstration constructive : on montre comment faire en effectuant une partition du domaine à l’aide de rectangles constitués de deux petits carrés.

Les cases noires sont une CN ; est-ce une CS ?

• Démonstration de l’impossibilité lorsque le trou se trouve sur une case blanche

Lorsque le carré noir est en bordure, sa colonne et sa ligne sont composées d’un nombre de carrés multiple de 2 (vert) et on fait apparaître un carré composé d’un nombre de cases multiple de 2 (en bleu).

4. Conclusion

On a dégagé la notion de CN, CS.

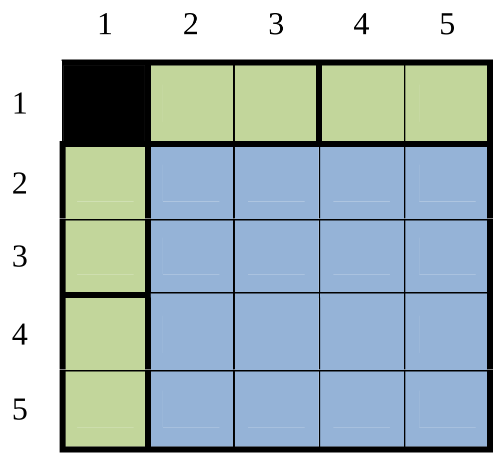
Existence : On va utiliser une démarche algorithmique (c'est-à-dire une preuve constructive).

Il s'agit d'un problème de pavage (géométrie combinatoire).

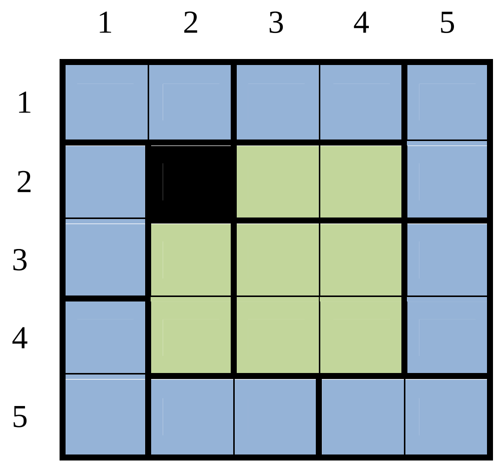
Extrait de la copie de Donatien Lenoir et Aliénor Legouet :

Nous avons observé que lorsque le carré noir est en bordure, sa colonne et sa ligne sont composée d'un nombre de carrés multiple de 2 (vert), un carré composé d'un nombre de cases multiple de 2 (en bleu)

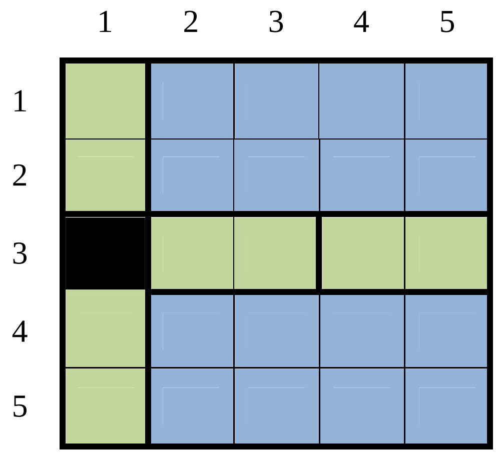
De même, ici deux rectangles composés d'un nombre de case multiple de 2 sont formés.

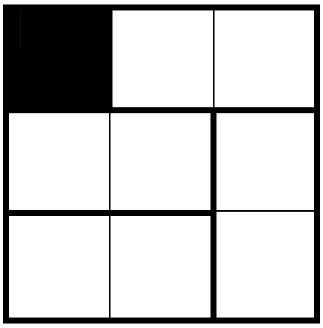


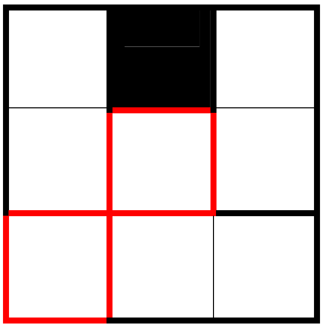
Lorsque le carré noir ne se trouve pas en bordure, on trace un carré (le vert) ; la règle précédente s'applique donc puis on parque le contour (en bleu).

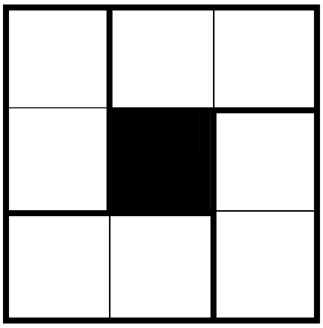


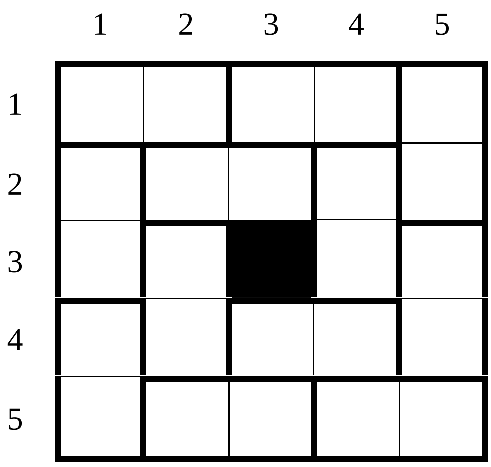
Ensuite le damier de base et les exemples pour le 3×3 au début.
À droite du damier, c'est quand c'est au centre, on a juste à parquer autour.










1 2 3 4 5
1
2
3
4
5