TS3

Interrogation écrite du vendredi 5 février 2010 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………….. **Note : ……/20**

I. (1 point) Question de cours : caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur à l'aide du conjugué

Soit z un nombre complexe.
Compléter les équivalences suivantes à l'aide du conjugué.

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ ……………… ; $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow$ ………………

II. (4 points) Donner les écritures algébriques des nombres complexes suivants en simplifiant éventuellement.

$\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2} =$ ………………..	$(1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) =$ …………………..
$(2\mathrm{i})^3(\mathrm{i}-1) =$ …………………..	$\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} =$ ………………..

III. (3 points) On pose $z = x + \mathrm{i}y$, x et y étant deux réels.

Dans chaque cas, donner l'écriture algébrique des nombres suivants (en supposant dans chaque cas que le quotient existe) ; donner les résultats en fonction de x et y.

$\dfrac{1}{z} =$ …………………	$\dfrac{1}{z-1} =$ …………………	$\dfrac{1}{z+\mathrm{i}} =$ …………………

IV. (3 points) À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe $Z = z + \mathrm{i}\overline{z}$.

1°) Calculer Z pour $z = 1 + \mathrm{i}$.

$Z =$ …………………………………

2°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.
Exprimer $\operatorname{Re} Z$ et $\operatorname{Im} Z$ en fonction de x et y.

On ne détaillera pas les calculs ; donner les résultats dans l'encadré ci-contre.

$\text{Re}\, Z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\text{Im}\, Z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3°) $\overline{Z}$ est égal à (entourer la bonne réponse) :

$z - \mathrm{i}\overline{z}$	$\overline{z} - \mathrm{i}z$	$-\overline{z} + \mathrm{i}z$	$-\overline{z} - \mathrm{i}z$

4°) Question bonus : démontrer que Z^2 est un imaginaire pur.

……………………………………………………………..………………………………………………………......

……………………………………………………………..……………………………………….……………...

……………………………………………………………..……………………………………..……………...

Dans les exercices V à VIII, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

V. (1 point) Soit *z* un nombre complexe non nul.

On note A et B les points d'affixes respectives *z* et $\dfrac{1}{z}$.

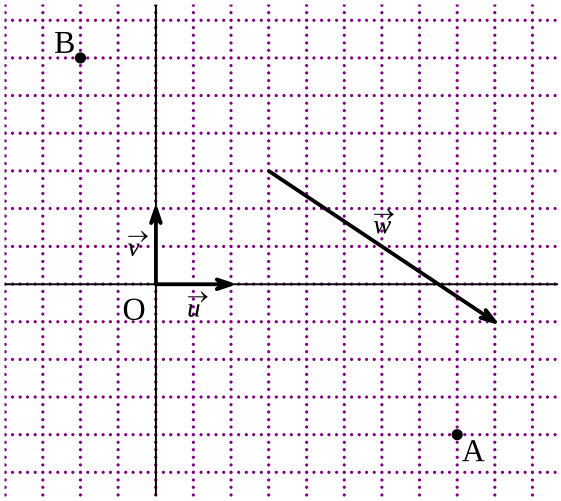
Donner l'affixe du point I milieu du segment [AB] en fonction de *z*.

$z_{\mathrm{I}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

VI. (1 point) Soit A un point d'affixe *z*. On note B le symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.
Calculer l'affixe du point G barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2) en fonction de *z*.

$z_{\mathrm{G}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

VII. (2 points) On considère la figure ci-dessous.



1°) Donner les affixes des points A et B.

$z_A =$	$z_B =$ ....

2°) Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} =$	$z_{\vec{w}} =$ ....

VIII. (1 point) Donner la nature de l'ensemble E des points M du plan dont les cordonnées cartésiennes x et y vérifient la relation $x^2+y^2+2x-4y-20=0$.

L'ensemble E est ……………………………………………………………………………………..

IX. (2 points) Donner les ensembles de solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes :

$z^3=-4z$ (1) ; $z(z-2)=1$ (2).

On note S_1 et S_2 les ensembles de solutions respectifs de (1) et (2).

$S_1 =$	$S_2 =$ ....

X. (2 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z+2\overline{z}=3-\mathrm{i}$ (E). Détailler toute la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

TS3

Corrigé de l'interrogation écrite du 5 février 2010

I. Question de cours : caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur à l'aide du conjugué

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$; $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

II.

$\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}} = \dfrac{1\times\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\times\mathrm{i}} = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$	$(1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) = 65$
$(2\mathrm{i})^3(\mathrm{i}-1) = 8+8\mathrm{i}$	$\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$

III.

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$	$\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{(x-1)-\mathrm{i}y}{(x-1)^2+y^2}$	$\dfrac{1}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{x-\mathrm{i}(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{1\times(x-\mathrm{i}y)}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(x-1)+\mathrm{i}y} = \frac{(x-1)-\mathrm{i}y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{x+\mathrm{i}(y+1)} = \frac{x-\mathrm{i}(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

IV.

1°)

$$\boxed{Z = 2(1+\mathrm{i})}$$

2°)

$$\begin{aligned} Z &= z + \mathrm{i}\overline{z} \\ &= x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) \\ &= x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}x + y \\ &= x + y + \mathrm{i}(x + y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Re}\, Z = x + y \\ \\ \mathrm{Im}\, Z = x + y \end{array}}$$

3°) $\overline{Z} = \overline{z} - \mathrm{i}\, z$

4°) **Question bonus :**

$Z = x + y + \mathrm{i}(x + y) = (x + y)(1 + \mathrm{i})$.

$Z^2 = (x + y)^2 \underbrace{(1 + \mathrm{i})^2}_{2\mathrm{i}}$

$Z^2 = 2\mathrm{i}(x + y)^2$

$Z^2 = \underbrace{2(x + y)^2}_{\in \mathbb{R}}\mathrm{i}$

V. On utilise la formule donnant l'affixe d'un milieu.

$$\boxed{z_{\mathrm{I}} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}}$$

VI. On utilise la formule donnant l'affixe d'un barycentre.

$$\boxed{z_{\mathrm{G}} = \frac{z_{\mathrm{A}} + 2z_{\mathrm{B}}}{3} = \frac{z + 2\overline{z}}{3}}$$

VII.

1°)

$z_{\mathrm{A}} = 4 - 2\mathrm{i}$	$z_{\mathrm{B}} = -1 + 3\mathrm{i}$

2°)

$z_{\overrightarrow{AB}} = -5+5\text{i}$	$z_{\vec{w}} = 3-2\text{i}$

VIII.

L'équation $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ est équivalente à $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

L'ensemble E est le cercle de centre Ω (– 1 ; 2) et de rayon $R=5$.

Ou

L'ensemble E est le cercle de centre Ω d'affixe – 1 + 2i et de rayon $R=5$.

IX. $z^3=-4z$ (1) ;

$S_1=\{0, -2\text{i}, 2\text{i}\}$	$S_2=\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$

(1) $\Leftrightarrow$ $z^3+4z=0$

$\Leftrightarrow$ $z(z^2+4)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ou} \\ z^2+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ou} \\ z^2=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ou} \\ z=2\text{i} \\ \text{ou} \\ z=-2\text{i} \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow$ $z^2-2z-1=0$

On aboutit à une équation du second degré.

On utilise le discriminant (ou mieux le discriminant réduit).

X. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z+2\overline{z}=3-\mathrm{i}$ (E).

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x,\, y)\in\mathbb{R}^2$.

On a alors : $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$

(E) $\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)+2(x-\mathrm{i}y)=3-\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 3x-\mathrm{i}y=3-\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ -y=-1 \end{cases}$ (égalité de deux nombres complexes écrits sous forme algébrique)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z=1+\mathrm{i}$

$S=\{1+\mathrm{i}\}$