1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les calculs de dérivées

Consigne pour les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{9}$:
Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f définie par l'expression donnée.

$\boxed{1}$ Formule $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$

$f(x)=x-2$; $f(x)=\dfrac{3}{4}+x^2$; $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$; $f(x)=x^6+x^4$; $f(x)=x^2+x-5$.

$\boxed{2}$ Formule $\boxed{(ku)'=ku'}$

$f(x)=3x$; $f(x)=\dfrac{3}{4}x^2$; $f(x)=-2x^3$; $f(x)=\dfrac{x^2}{10}$; $f(x)=\dfrac{3x}{5}$; $f(x)=-\dfrac{3}{x}$; $f(x)=-\dfrac{1}{2x}$; $f(x)=4\sqrt{x}$.

Indications :

Pour certaines fonctions, on est obligé de faire une réécriture de l'expression afin de pouvoir appliquer la formule $(ku)'=ku'$.

Pour $f(x)=\dfrac{x^2}{10}$, écrire $f(x)=\dfrac{1}{10}\times x^2$.

Pour $f(x)=\dfrac{3x}{5}$, écrire $f(x)=\dfrac{3}{5}\times x$.

Pour $f(x)=-\dfrac{3}{x}$, écrire $f(x)=-3\times\dfrac{1}{x}$.

Pour $f(x)=-\dfrac{1}{2x}$, écrire $f(x)=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x}$.

$\boxed{3}$ Dérivées de fonctions polynômes ; utilisation simultanée des deux formules $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$ **et** $\boxed{(ku)'=ku'}$

$f(x)=2x^2-x+3$; $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-1$; $f(x)=-x^2+3x-1$; $f(x)=2x-3$; $f(x)=x^4-3x^3+4x^2-\dfrac{1}{2}x+7$.

$\boxed{4}$ Dérivée d'un produit $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$

$f(x)=(3x^2-2x+7)(x-1)$ (ne pas développer $f(x)$ avant de dériver la fonction mais donner le résultat sous forme développée réduite)
$f(x)=(2x+1)\sqrt{x}$ (donner le résultat sous forme d'un seul quotient ; laisser la racine carrée au dénominateur).

$\boxed{5}$ Dérivée de l'inverse d'une fonction ; utilisation de la formule $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}}$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ (ne pas développer le dénominateur dans le résultat).

$\boxed{6}$ Dérivée d'un quotient (fonction rationnelle) ; utilisation de la formule $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$

$f(x)=\dfrac{3x-2}{x+3}$; $f(x)=\dfrac{x^2+2x-6}{x-1}$ (ne pas développer les dénominateurs dans les résultats).

$\boxed{7}$ Dérivée de la puissance d'une fonction ; utilisation de la formule $\boxed{(u^n)'=nu'u^{n-1}}$

$f(x)=(x^2-x+2)^2$; $f(x)=(x^3+5x^2-1)^5$ (ne pas développer les résultats).

$\boxed{8}$ Dérivée de l'inverse de la puissance d'une fonction ; utilisation de la formule $\boxed{\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}}$

$f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$; $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

$\boxed{9}$ Dérivée de fonctions utilisant des réécritures ($\dfrac{k}{u}$ et $\dfrac{u}{k}$)

$f(x)=\dfrac{3}{x^2+2}$ (avant de dériver, faire une réécriture de $f(x)$ sous la forme $f(x)=3\times\ldots$; ne pas développer le dénominateur dans le résultat)

$f(x)=\dfrac{-x^2+3x+1}{3}$ (faire une réécriture de $f(x)$ sous la forme $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\ldots$; ne pas développer le dénominateur)

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}$ (ne pas mettre l'expression initiale au même dénominateur avant de dériver la fonction ; ne pas mettre le résultat au même dénominateur)

$f(x)=\dfrac{3}{(x^2-1)^4}$

$f(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}$

$\boxed{10}$ On considère la fonction f définie par $f(x)=2x^2+3x-1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 1.
On conclura ainsi :

« La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 1 au point A(…. ; …..). »

3°) Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y=3x+5$.

11 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y=4x$.

12 On considère la fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer a, b, c sachant que $\mathcal{C}$ vérifie les hypothèses (conditions) suivantes

H_1 : $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère O.

H_2 : $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1\,;-3)$.

H_3 : la tangente en O à $\mathcal{C}$ a pour équation réduite $y=-4x$.

13 On considère la fonction f définie par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer a, b, c, d sachant que $\mathcal{C}$ vérifie les hypothèses (conditions) suivantes.

H_1 : $\mathcal{C}$ coupe l'axe (Oy) au point d'ordonnée 20.

H_2 : $\mathcal{C}$ passe par le point A(– 1 ; 18).

H_3 : $\mathcal{C}$ admet une tangente en A de coefficient directeur 3.

H_4 : $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

14 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{3x-2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer a et b sachant que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point A(0 ; 1) et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

15 Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A indiqué.

1°) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+x+1}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1.

2°) $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+1}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse – 1.

3°) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 4.

4°) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

Corrigé

Indication : pour tous les calculs de dérivées, on peut vérifier les résultats à l'aide du logiciel *XCas* (logiciel de calcul formel).

Pour les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{3}$, on laisse les résultats à l'état brut en simplifiant au minimum.

On n'écrit pas les formules utilisées ; en revanche, on laisse les « traces » des formules utilisées.

On pourra parler (à l'oral mais pas à l'écrit) de la « forme de base » ou de la « forme originale » de la fonction pour déterminer.

Les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{9}$ sont classés par formules afin de faciliter la mise en pratique.

$\boxed{1}$ **Formule** $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$

Réponses : $f'(x)=1$; $f'(x)=2x$; $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+1$ (ne pas mettre au même dénominateur) ;
$f'(x)=6x^5+4x^3$; $f'(x)=2x+1$.

Solution détaillée :

★ $f(x)=x-2$

Version au brouillon :

On pose $u(x)=x$ et $v(x)=-2$.

On a donc $u'(x)=1$ et $v'(x)=0$ (car v est une fonction constante).

$$\begin{aligned}f'(x)&=1-0\\&=1\end{aligned}$$

La dérivée ne dépend pas de x ce qui est normal car f est une fonction affine.

Le fait d'écrire $f'(x)=1-0$ n'est pas forcément idiot : on a une trace écrite montrant la formule utilisée.

★ $f(x)=\dfrac{3}{4}+x^2$

Version au brouillon :

On pose $u(x)=\dfrac{3}{4}$ et $v(x)=x^2$.

On a donc $u'(x)=0$ et $v'(x)=2x$ (car v est une fonction constante).

$$f'(x)=2x$$

★ $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$

$$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+1$$

On laisse le résultat sous cette forme, sans chercher à mettre au même dénominateur.

★ $f(x)=x^6+x^4$

$$f'(x)=6x^5+4x^3$$

On ne peut pas aller plus loin. Il est même saugrenu de se poser la question.

★ $f(x)=x^2+x-5$

$$f'(x)=2x+1$$

$\boxed{2}$ **Formule** $\boxed{(ku)'=ku'}$

Réponses : $f'(x)=3$; $f'(x)=\dfrac{3}{2}x$; $f'(x)=-6x^2$; $f'(x)=\dfrac{x}{5}$; $f'(x)=\dfrac{3}{5}$; $f'(x)=\dfrac{3}{x^2}$; $f'(x)=\dfrac{1}{2x^2}$;
$f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

On montre la réécriture utilisée.

Solution détaillée :

★ $f(x)=3x$

$$\begin{aligned}f'(x)&=3\times1\\&=3\end{aligned}$$

★ $f(x)=\dfrac{3}{4}x^2$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\dfrac{3}{4}\times2x\\&=\dfrac{3}{2}x\end{aligned}$$

★ $f(x) = -2x^3$

$f'(x) = -2 \times 3x^2$
$= -6x^2$

★ $f(x) = \dfrac{x^2}{10}$

$f(x) = \dfrac{1}{10}x^2$ (on « démembre » ou on sépare »)

Avec cette nouvelle écriture, on peut appliquer la formule de dérivée de $(ku)' = ku'$ avec $k = \dfrac{1}{10}$ et $u : x \mapsto x^2$.

$f'(x) = \dfrac{1}{10} \times 2x$
$= \dfrac{x}{5}$

★ $f(x) = \dfrac{3x}{5}$

$f(x) = \dfrac{3}{5}x$

$f'(x) = \dfrac{3}{5} \times 1$
$= \dfrac{3}{5}$

★ $f(x) = -\dfrac{3}{x}$

$f(x) = -3 \times \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = -3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
$= \dfrac{3}{x^2}$ (on remet le – 3 « dessus » ; les deux signes – se neutralisent)

★ $f(x) = -\dfrac{1}{2x}$

$f(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
$= \dfrac{1}{2x^2}$

★ $f(x) = 4\sqrt{x}$

$f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$= \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Dans cet exercice, on retiendra la méthode qui consiste à démembrer ou à séparer pour pouvoir appliquer la formule de dérivation de *ku*.

3 Dérivées de fonctions polynômes ; utilisation simultanée des 2 formules $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$ et $\boxed{(ku)' = ku'}$

On utilise simultanément les deux formules $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$.

On applique les deux formules en même temps.

Réponses : $f'(x) = 4x - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 3x$; $f'(x) = -2x + 3$; $f'(x) = 2$; $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - \dfrac{1}{2}$

Solution détaillée :

★ $f(x) = 2x^2 - x + 3$

$f'(x) = 4x - 1$

★ $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 1$

$f'(x) = 3x^2 + 3x$

★ $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

$f'(x) = -2x + 3$

★ $f(x) = 2x - 3$

$f'(x) = 2$

★ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - \dfrac{1}{2}x + 7$

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - \dfrac{1}{2}$

À partir de l'exercice $\boxed{4}$, on applique le principe de **calcul de « sous-dérivée »**.

4 **Dérivée d'un produit** $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

Réponses : $f'(x) = 9x^2 - 10x + 9$; $f'(x) = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}$

Solution détaillée :

★ $f(x) = (3x^2 - 2x + 7)(x-1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x-2)(x-1) + (3x^2-2x+7)\times 1 \\ &= 6x^2 - 6x - 2x + 2 + 3x^2 - 2x + 7 \\ &= 9x^2 - 10x + 9 \end{aligned}$$

★ $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{x} + (2x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(2\sqrt{x})^2 + (2x+1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(On utilise l'égalité } a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}\text{)} \end{aligned}$$

On laisse la racine carrée au dénominateur.

5 **Utilisation de la formule** $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$$

$f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ (on ne développe pas le carré présent au dénominateur : ce serait long et sans intérêt)

On ne fait rien pour le dénominateur.

Cours particulier avec Guillaume Berger le 12-12-2014

La formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ c'est une formule spéciale.

« Dans la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, le 1 on l'oublie complètement. »

On prend $x^2 + x + 1$.
On le dérive et on met le dérivé en haut.

6 **Utilisation de la formule** $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}}$

Réponses : $f'(x) = \dfrac{11}{(x+3)^2}$; $f'(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$

Solution détaillée :

★ $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3\times(x+3) - (3x-2)\times 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{3x+9-3x+2}{(x+3)^2} \\ &= \frac{11}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

brouillon :

$u(x) = 3x-2$ donc $u'(x) = 3$

$v(x) = x+3$ donc $v'(x) = 1$

★ $f(x) = \dfrac{x^2+2x-6}{x-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)\times(x-1) - (x^2+2x-6)\times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x+6}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

brouillon :

$u(x) = x^2+2x-6$ donc $u'(x) = 2x+2$

$v(x) = x-1$ donc $v'(x) = 1$

7 **Utilisation de la formule** $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$

Réponses : $f'(x) = 2(2x-1)(x^2-x+2)$; $f'(x) = 5(3x^2+10x)(x^3+5x^2-1)^4$

Solution détaillée :

★ $f(x) = (x^2-x+2)^2$

$$f'(x) = 2(2x-1)(x^2-x+2)$$

On applique la formule avec $u(x) = x^2 - x + 2$ et $n = 2$.
On a : $u'(x) = 2x - 1$.

★ $f(x)=\left(x^3+5x^2-1\right)^5$

$f'(x)=5\left(3x^2+10x\right)\left(x^3+5x^2-1\right)^4$

On applique la formule avec $u(x)=x^3+5x^2-1$ et $n=5$.

On a : $u'(x)=3x^2+10x$.

$\boxed{8}$ **Utilisation de la formule** $\boxed{\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}}$

Réponses : $f'(x)=-\dfrac{4}{(2x-1)^3}$; $f'(x)=-\dfrac{6x}{\left(x^2+1\right)^4}$

Solution détaillée :

★ $f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$

$$f'(x)=-\frac{2\times 2}{(2x-1)^3} \quad \textbf{(sous-dérivée)}$$

$$=-\frac{4}{(2x-1)^3}$$

★ $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^3}$

$$f'(x)=-\frac{3\times 2x}{\left(x^2+1\right)^4} \quad \text{(sous-dérivée)}$$

$$=-\frac{6x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$\boxed{9}$ $f'(x)=-\dfrac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}$; $f'(x)=\dfrac{-2x+3}{3}$

On effectue la réécriture suivante : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{1}{x-1}+2\times\dfrac{1}{x+3}$; on dérive ensuite terme à terme.

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{(x+3)^2}$; $f'(x)=-\dfrac{24x}{\left(x^2-1\right)^5}$; $f'(x)=-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$.

Solution détaillée :

Dans cet exercice, on laisse les « marques » des formules utilisées.

• $f(x)=\dfrac{3}{x^2+2}=3\times\dfrac{1}{x^2+2}$

$D_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3\times\left[-\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}\right]$$

$$=-\frac{6x}{\left(x^2+2\right)^2} \quad \text{(on ne développe pas le dénominateur)}$$

• $f(x)=\dfrac{-x^2+3x+1}{3}=\dfrac{1}{3}\left(-x^2+3x+1\right)$

$D_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{1}{3}(-2x+3)$$

$$=\frac{-2x+3}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}x+1$$

• $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{1}{x-1}+2\times\dfrac{1}{x+3}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\,;-3\}$

On modifie l'expression initiale de la fonction f avant de dériver afin de dériver plus simplement.

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\,;-3\}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\,;-3\}\quad f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+2\times\left[-\frac{1}{(x+3)^2}\right]$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x+3)^2} \quad \text{(on ne développe pas les dénominateurs)}$$

On retiendra que pour calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x+3}$ on effectue la réécriture $\dfrac{2}{x+3} = 2\times\dfrac{1}{x+3}$ plutôt que d'appliquer la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ qui conduirait à des calculs assez lourds.

$\underbrace{\dfrac{2}{x+3} = 2\times}_{k}\dfrac{1}{x+3}$

Si on applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ pour calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{2}{x+3}$, on obtient

$\dfrac{0\times(x+3)-2\times1}{(x+3)^2} = \dfrac{0-2}{(x+3)^2} = -\dfrac{2}{(x+3)^2}$

(on pose $u(x)=2$ $\quad u'(x)=0$
$v(x)=x+3$ $\quad v'(x)=1$)

Autre écriture possible :

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2-2x+1} - \dfrac{2}{x^2+6x+9}$

Cette formule n'est pas intéressante car on ne dérive jamais les dénominateurs des dérivées.

- $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{3}{(x^2-1)^4} = 3\times\dfrac{1}{(x^2-1)^4}}$ (on ne développe pas le dénominateur)

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\,;-1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\,;-1\}$ comme fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\,;-1\}\quad f'(x) = 3\times\left[-4\times\dfrac{2x}{(x^2-1)^5}\right]$

$= -\dfrac{24x}{(x^2-1)^5}$

- $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x-1}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\quad f'(x) = \dfrac{1}{2}\times\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]$

$= -\dfrac{1}{2(x-1)^2}$

Commentaire général : on peut dire d'une certaine manière que l'on « démembre » la fonction.

$\boxed{10}$

$f : x \mapsto 2x^2+3x-1$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x) = 4x+3$

2°) **Déterminons les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 1.**

Faire un graphique ; ça aide à comprendre.

On utilise la dérivée de *f*.

Méthode : dès qu'on a une tangente, on pense à la dérivée.

On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a est égale à $f'(a)$.

On cherche a tel que $f'(a)=1$ (1).

On peut avoir un autre coefficient directeur 2, 3 … (suivant l'énoncé)

(1) est successivement équivalente à

$4a+3=1$
$4a=1-3$
$4a=-2$
$a=-\dfrac{2}{4}$
$a=-\dfrac{1}{2}$

$\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 1 au point A d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

Pour déterminer l'ordonnée du point A, on calcule $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} - 1 = -2$.

Conclusion :

$\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 1 au point $A\left(-\frac{1}{2}\,;-2\right)$.

3°) $\Delta :\ y=3x+5$

Déterminons les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite Δ.

Le coefficient directeur de Δ est égal à 3.
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

On cherche a tel que $f'(a)=3$ (2).
(2) est successivement équivalente à

$4a+3=3$
$4a=0$
$a=0$

$\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à Δ au point B d'abscisse 0.
Pour déterminer l'ordonnée du point B, on calcule $f(0)=2\times 0^2+3\times 0-1=-1$.

Conclusion :

$\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à Δ au point B(0 ; – 1).

$\boxed{11}$ 1°) $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ 2°) $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ aux points $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,;\,2-2\sqrt{2}\right)$ et $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,;\,2+2\sqrt{2}\right)$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \frac{2x}{x+1}$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme fonction rationnelle (c'est même une fonction homographique).

$$\forall x\in\mathcal{D}_f \quad f'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}$$

2°) **Déterminons les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y=4x$.**

Le coefficient directeur de Δ est égal à 4.
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

On cherche a tel que $f'(a)=4$ (1).

(1) est successivement équivalente à

$\frac{2}{(a+1)^2}=4$

$2=4(a+1)^2$ (produit en croix)

$(a+1)^2=\frac{2}{4}$

$(a+1)^2=\frac{1}{2}$

$a+1=\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $a+1=-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$a+1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $a+1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $a=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

On calcule les images par f des deux valeurs trouvées

$$f\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\frac{2\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-2+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2-2\sqrt{2}$$

$$f\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-1-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\frac{2\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-2-\sqrt{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2+2\sqrt{2}$$

$\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à Δ aux points $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,;\,2-2\sqrt{2}\right)$ et $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,;\,2+2\sqrt{2}\right)$.

12

$a=1$; $b=-4$; $c=0$

Méthode : on prend les hypothèses les unes après les autres.
On peut aussi faire un système.

H_1 : $f(0)=0$; H_2 : $f(1)=-3$; H_3 : $f'(0)=-4$

D'après H_3, la tangente en O à $\mathcal{C}$ a pour équation réduite $y=-4x$ donc le coefficient directeur de la tangente est égal à – 4.

Remarques :

On n'utilise pas la formule donnant une équation de la tangente en un point.
On n'utilise pas l'équation réduite de Δ.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto ax^2+bx+c}$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=2ax+b$

2°) **Déterminons *a, b, c*.**

> *Méthode :*
>
> À partir des informations de l'énoncé, on écrit des égalités de la forme $f(....)=....$ ou $f'(....)=....$.

D'après H_1, $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère donc $f(0)=0$.
Par suite, $c=0$.

D'après H_2, $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1\,;\,-3)$ ce qui se traduit par $f(1)=-3$.
Donc $a+b=-3$.

D'après H_3, la tangente en O à $\mathcal{C}$ a pour équation réduite $y=-4x$ donc son coefficient directeur vaut – 4 ce qui se traduit par $f'(0)=-4$ ce qui donne $2a\times 0+b=-4$.
D'où $b=-4$.

Donc $a=1$.

Conclusion : $a=1$; $b=-4$; $c=0$

13

On traduit les hypothèses par : $f(0)=20$; $f(-1)=18$; $f'(-1)=3$.
On trouve : $a=-1$, $b=-3$, $c=0$, $d=20$.

Remarques :

• À chaque fois qu'on augmente le degré de 1, il faut une autre hypothèse.

• *a, b, c, d* : coefficients du polynôme.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d}$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$

2°) **Déterminons *a, b, c, d*.**

> *Méthode :*
>
> À partir des informations de l'énoncé, on écrit des égalités de la forme $f(....)=....$ ou $f'(....)=....$.

H_1 : B(0 ; 20) $\in \mathcal{C}$ donc $f(0)=20$ (1)

H_2 : A(– 1 ; 18) $\in \mathcal{C}$ donc $f(-1)=18$ (2)

H_3 : la tangente en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y=3x$ donc $f'(-1)=3$ * (3)

H_4 : la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 (c'est-à-dire en B) est horizontale donc $f'(0)=0$ ** (4)

* En effet, dans ce cas, la tangente en A à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur 3.

** En effet, dans ce cas, la tangente en B à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur 0.

Les informations sont de deux types :

Celles du type « Le point … appartient à $\mathcal{C}$ » ou « la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point … » ; ces informations se traduisent par des égalités de la forme $f(....) = ...$.

Celles du type « La tangente à $\mathcal{C}$ au point … ; » ; ces informations se traduisent par des égalités de la forme $f'(....) = ...$.

(1) équivaut à $d = 20 \quad (1')$.

(2) équivaut à $a \times (-1)^3 + b \times (-1)^2 + c \times (-1) + d = 18$ que l'on écrit directement $-a + b - c + d = 18 \quad (2')$.

(3) équivaut $3a - 2b + c = 3 \quad (3')$.

(4) équivaut à $c = 0 \quad (4')$.

Le système $\begin{cases} (1') \\ (2') \\ (3') \\ (4') \end{cases}$ est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 20 \\ -a + b = -2 \\ 3a - 2b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 20 \\ b = a - 2 \\ 3a - 2a + 4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 20 \\ b = -3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Conclusion : $a = -1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 20$

f est définie par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 20$.

$\boxed{14}$ $f : x \mapsto \dfrac{ax^2 + b}{3x - 2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

1°) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\} \quad f'(x) = \dfrac{3ax^2 - 4ax - 3b}{(3x-2)^2}$.

2°)
D'après H_1, on a : $f(0) = 1$.
D'après H_2, on a : $f'(1) = 0$.
On trouve $a = 6$; $b = -2$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{ax^2 + b}{3x - 2}$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} \qquad f'(x) = \frac{2ax(3x-2) - 3(ax^2 + b)}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{6ax^2 - 4ax - 3ax^2 - 3b}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{3ax^2 - 4ax - 3b}{(3x-2)^2}$$

2°) **Déterminons *a* et *b*.**

$$\begin{cases} H_1 : A(0\ ;\ 1) \in \mathcal{C} \text{ donc } f(0) = 1 & (1) \\ H_2 : \mathcal{C} \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse donc } f'(1) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) est équivalente à : $-\dfrac{b}{2} = 1 \ (1')$.

(2) est équivalente à : $3a - 4a - 3b = 0 \quad (2')$.

Le système $\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}$ (système linéaire de 2 équations à 2 inconnues) est successivement équivalent à :

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2}=1\\-a-3b=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=-2\\-a+6=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=-2\\a=6\end{cases}$$

Conclusion : $a=6$; $b=-2$.

La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{6x^2-2}{3x-2}$.

$\boxed{15}$ Équations de tangentes

Réponses :

1°) $f'(x)=-\dfrac{2x^2+10x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; T : $y=-\dfrac{5}{3}x+4$

2°) $f'(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$; T : $y=-x-\dfrac{1}{2}$

3°) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}$; T : $y=\dfrac{5}{16}x+\dfrac{1}{2}$

4°) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}$; T : $y=12x-8$

Solutions détaillées :

Dans chaque cas, on utilise la formule donnant une équation de la tangente en un point d'abscisse a :
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

On applique la formule en situation.

On vérifie toutes les équations des tangentes grâce à la calculatrice graphique.

1°) $f : x\mapsto \dfrac{2x+5}{x^2+x+1}$

$D_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{2\left(x^2+x+1\right)-(2x+5)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$
$$=\frac{2x^2\cancel{+2x}+2-4x^2\cancel{-2x}-10x-5}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$
$$=\frac{-2x^2-10x-3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$
$$=-\frac{2x^2+10x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$f(1)=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}$$

$$f'(1)=-\frac{2+10+3}{3^2}=-\frac{15}{3^2}=-\frac{5}{3}$$

Une équation de T s'écrit :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y=-\frac{5}{3}(x-1)+\frac{7}{3}$$
$$y=-\frac{5}{3}x+4$$

2°) $f : x\mapsto \dfrac{x^2-x-1}{x^2+1}$

$D_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{(2x-1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2-x-1\right)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{\cancel{2x^3}-x^2+2x-1\cancel{-2x^3}+2x^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{x^2+4x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f(-1)=\frac{1+1-1}{2}=\frac{1}{2}$

$f'(-1)=\frac{1-4-1}{4}=-1$

Une équation de T s'écrit :

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$
$$y=-x-1+\frac{1}{2}$$
$$y=-x-\frac{1}{2}$$

3°) $\boldsymbol{f : x \mapsto \sqrt{x}-\frac{1}{x}}$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}_+$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (attention f n'est pas une fonction rationnelle).

$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$

$f(4)=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

$f'(4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

Une équation de T s'écrit :

$$y=f'(4)(x-4)+f(4)$$
$$y=\frac{5}{16}(x-4)+\frac{7}{4}$$
$$y=\frac{5}{16}x-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}$$
$$y=\frac{5}{16}x+\frac{1}{2}$$

4°) $\boldsymbol{f : x \mapsto \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est une fonction rationnelle (ou somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$).

$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2-4=-2$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-4+2\times 8=-4+16=12$

Une équation de T s'écrit :

$$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$y=12\left(x-\frac{1}{2}\right)-2$$
$$y=12x-8$$

Formulaire récapitulatif

$f(x) =$	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	$f'(x) =$
k (k réel fixé)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n \ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n} \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u \times v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u} \ (u \neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v} \ (v \neq 0)$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$