

1^{ère} S Exercices sur les dérivées des fonctions de référence

1 Dans chaque cas, donner la dérivée de la fonction f .

On se contentera d'écrire $f'(x) = \dots$.

1°) f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 10$.

2°) f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^6$.

3°) f est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

2 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Donner la fonction dérivée de f .

2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1.

On rédigera ainsi :

« L'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point A s'écrit $y = \dots$ ».

3°) Tracer \mathcal{C} et T sur un graphique (unité graphique : 1 cm ou un « gros » carreau).

Pour le tracé de T , on pourra utiliser le point A et le coefficient directeur (l'équation réduite n'est pas forcément utile pour tracer une tangente).

3 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Donner la fonction dérivée de f .

2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1.

3°) Tracer \mathcal{C} et T sur un graphique (unité graphique : 1 cm).

4 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Donner la fonction dérivée de f .

2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1.

3°) Tracer \mathcal{C} et T sur un graphique (unité graphique : 1 cm ou un « gros » carreau).

5 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Donner la fonction dérivée de f .

2°) Déterminer en quels points la courbe \mathcal{C} admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$.

Mise en garde : l'équation réduite de la tangente ne sert à rien pour ce type d'exercice.

On rédigera ainsi la conclusion :

« La courbe \mathcal{C} admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$ aux points A(... ; ...) et B(... ; ...) ».

6 On considère la fonction $f: x \mapsto x^3$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Donner la fonction dérivée de f .

2°) Donner l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1.

3°) a) Développer et réduire l'expression $d(x) = (x-1)^2(x+2)$.

b) Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à T (faire un tableau).

4°) Tracer la courbe \mathcal{C} (unité : 1 cm ou un « gros » carreau) et la tangente T puis marquer le point B où T recoupe \mathcal{C} .

7 On considère la fonction $f: x \mapsto x^2$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Tracer la courbe \mathcal{C} (unité : 2 cm ou 2 « gros » carreaux).

On pourra utiliser avec profit un logiciel de géométrie dynamique tel que *Geogebra*.

À l'aide du graphique, conjecturer s'il existe des tangentes à \mathcal{C} passant par le point $A\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ et leur nombre.

1°) Démontrer que l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} en un point M d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$) s'écrit $y = 2ax - a^2$.

2°) Déterminer pour quelles valeurs de a la tangente T passe par le point A.

On rédigera ainsi : « $A \in T$ si et seulement si ...
si et seulement si ... »

(Il s'agit d'une chaîne d'équivalences).

3°) Écrire les équations réduites des tangentes qui passent par A.

Corrigé

Pour tous les exercices, il est demandé de respecter vraiment la rédaction et de l'apprendre.

1) Calculs de dérivées

Réponses : 1°) $f'(x) = 0$; 2°) $f'(x) = 6x^5$; 3°) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

Solution détaillée :

On applique directement les formules du cours (on ne repasse pas par la définition $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$).

1°) $f: x \mapsto 10$

f étant une fonction constante, sa dérivée est la fonction constante nulle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0$$

2°) $f: x \mapsto x^6$

On utilise la formule qui donne la dérivée des fonctions du type $x \mapsto x^n$ où n est un entier naturel.

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Ici, $n = 6$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x^5$$

3°) $f: x \mapsto \frac{1}{x^3}$

On utilise la formule qui donne la dérivée des fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où n est un entier naturel.

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Ici, $n = 3$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{3}{x^4}$$

Autre façon :

On peut écrire $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ et appliquer la formule $(x^p)' = px^{p-1}$ valable pour $p \in \mathbb{Z}$ (qui n'est d'ailleurs pas donnée dans le cours).

Vocabulaire :

- Dans chaque cas, on dit que l'on a « dérivé » la fonction.
- On notera que l'on parle indifféremment de « fonction dérivée » ou de « dérivée » tout court.

Pour tous les exercices qui suivent, il est demandé de respecter l'unité graphique indiquée dans l'énoncé.

2) $f: x \mapsto x^2$ (f est la fonction « carré »)

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

\mathcal{E} : courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1°) Donnons la dérivée de f .

On sait d'après le cours que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$ (dérivée donnée dans le cours).

2°) Déterminons l'équation réduite de la tangente T au point A d'abscisse 1.

On applique la formule du cours en situation (pas de formule du type $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ où on n'a pas précisé ce qu'est a).

T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f'(1) = 2 \times 1 = 2 \quad (\text{on utilise la fonction dérivée calculée dans le 1°})$$

T a donc pour équation $y = 2(x-1) + 1$ soit $y = 2x - 1$.

L'équation réduite de T s'écrit : $y = 2x - 1$.

3°) Tracé de \mathcal{C} et de T

La courbe \mathcal{C} (représentation graphique de la fonction « carré ») est une parabole de sommet O.
On la trace rapidement en plaçant quelques points (les points d'abscisses $-2, -1, 0, 1, 2$ au minimum) et en les reliant « à la main » le plus harmonieusement possible).

| | | | | | | | |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

Pour le tracé de la tangente, il y a deux méthodes :

1^{ère} méthode :

D'après l'équation réduite de T trouvée précédemment, on peut dire que T a pour ordonnée à l'origine -1 . Comme T passe par le point A, on obtient le tracé de T très facilement.

2^e méthode :

On sait que T passe par A et a pour coefficient directeur 2. Cette méthode est meilleure que la précédente. Pour tracer une tangente, on n'a besoin que du coefficient directeur (on n'a pas besoin de l'équation réduite).

On attend évidemment un tracé précis de la tangente.

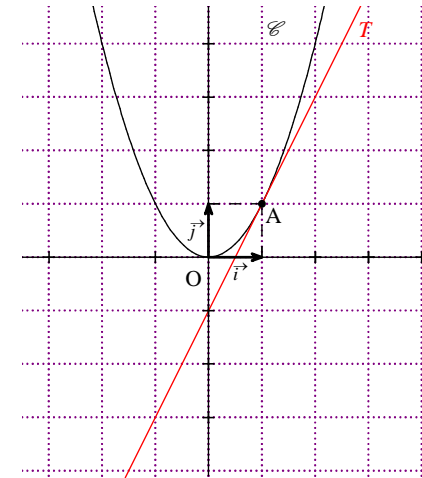
L'énoncé pourrait par exemple dire : « Tracer avec précision la tangente T . »

T coupe \mathcal{C} au point A(1 ; 1).

La tangente passe par le point A (« point de contact » ou « point de tangence »).

On obtient un deuxième point grâce au coefficient directeur.

Graphique :



Tracé d'une tangente à l'aide de la calculatrice :

Modèle TI :

On commence par tracer la courbe de la fonction sur l'écran de la calculatrice.

`2nde` `prgm` (dessin) 5 : Tangent (tangente) `1` `entrer`

↑
abscisse du point en lequel on désire tracer la tangente

`3` $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ (f est la fonction « inverse »)

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

\mathcal{C} : courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1°) Dérivée de f

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

2°) Équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 1

T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$$f(1) = 1$$

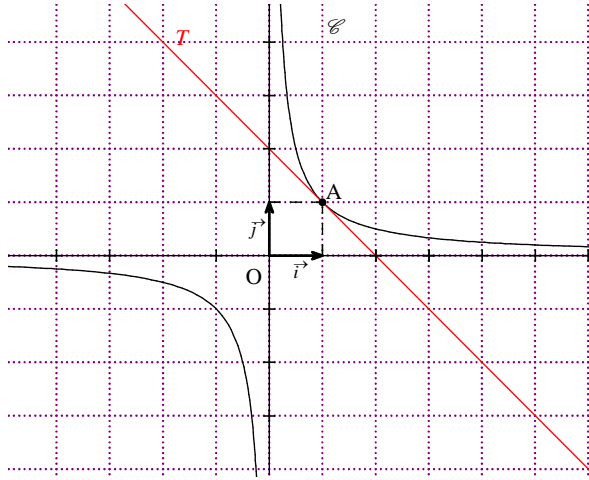
$$f'(1) = -1$$

T a donc pour équation $y = -(x-1) + 1$

L'équation réduite de T s'écrit : $y = -x + 2$.

3°) Tracé de \mathcal{C} et de T

Graphique :



On constate graphiquement que la tangente T est « entre » les deux branches de l'hyperbole, ce que l'on peut d'ailleurs démontrer par le calcul.

4) $f: x \mapsto \sqrt{x}$ (f est la fonction « racine carrée »)

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$$

\mathcal{C} : courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1°) Donnons la dérivée de f .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2°) Déterminons l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1

$$T \text{ a pour équation } y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$T \text{ a donc pour équation } y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 \text{ soit } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

$$\text{L'équation réduite de } T \text{ s'écrit donc } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

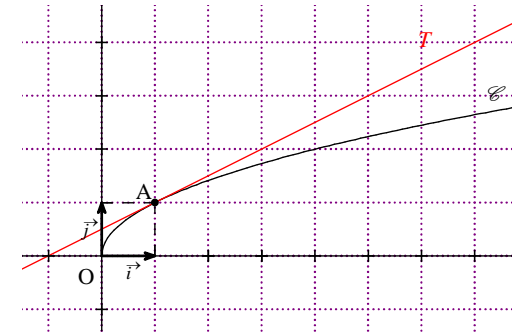
On peut aussi donner l'équation réduite de T sous la forme $y = \frac{x+1}{2}$.

3°) Tracé de \mathcal{C} et de T

| | | | | |
|--------|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $f(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |

On peut prendre un deuxième point à coordonnées entières pour tracer la tangente (par exemple le point $B(3; 2)$).

Graphique :



Avec la calculatrice TI 83 Plus, on obtient : $y = 0,50000006252x + 0,499999$.

Complément :

Étudions par le calcul la position de \mathcal{C} par rapport à T .

On étudie le signe de la différence $f(x) - \frac{x+1}{2}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) - \frac{x+1}{2} &= \sqrt{x} - \frac{x+1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - (x+1)}{2} \\ &= -\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2} \\ &= -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2} \leq 0$$

On en déduit que $\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) - \frac{x+1}{2} \leq 0$

soit $\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) \leq \frac{x+1}{2}$

On en déduit que la courbe \mathcal{C} est en dessous de T sur $[0; +\infty[$.

Ce résultat est bien conforme au graphique.

5 $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ (f est la fonction « inverse »)

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$$

\mathcal{C} : courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1°) **Donnons la fonction dérivée de f .**

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

2°) **Déterminons en quels points la courbe \mathcal{C} admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$.**

On peut essayer de trouver approximativement les points de la courbe en lesquels la tangente a pour coefficient directeur $-\frac{1}{4}$.

On peut avoir une idée avec la règle au début de l'exercice. Le but de l'exercice est de déterminer les points par le calcul.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* donc la courbe \mathcal{C} admet une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ en tout point d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}^*$).

On cherche $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $f'(a) = -\frac{1}{4}$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2 \text{ ou } a = -2$$

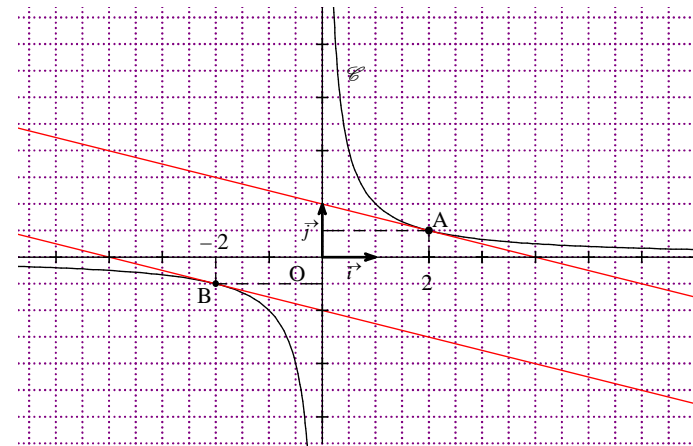
Conclusion :

La courbe \mathcal{C} admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$ aux points d'abscisses respectives 2 et -2.

\mathcal{C} admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$ aux points $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$ et $B\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ (on calcule leur ordonnée grâce à l'expression de la fonction).

Autre rédaction :

En version plus courte, on pourra dire : « On résout l'équation $f'(x) = -\frac{1}{4}$. »



On peut donner les équations réduites des deux tangentes :

- la tangente au point A a pour équation réduite $y = -\frac{1}{4}x + 1$;
- la tangente au point B a pour équation réduite $y = -\frac{1}{4}x - 1$.

On remarquera que les points A et B sont symétriques par rapport à O.

6 $f: x \mapsto x^3$ (f est la fonction « cube »)

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

\mathcal{C} : courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1°) **Calculons la dérivée de f .**

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$$

2°) **Déterminons l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1.**

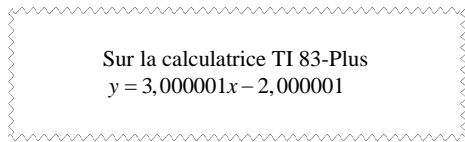
T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$$f(1) = 1$$

$$f'(1) = 3$$

Une équation de T s'écrit donc $y = 3(x-1) + 1$ soit $y = 3x - 2$.

L'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1 s'écrit : $y = 3x - 2$.



3°)

a) **Développons l'expression $d(x) = (x-1)^2(x+2)$.**

$$\begin{aligned} d(x) &= (x-1)^2(x+2) \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x+2) \\ &= x^3 + x - 2x^2 + 2x^2 + 2 - 4x \\ &= x^3 - 3x + 2 \end{aligned}$$

b) **Étudions la position de \mathcal{C} par rapport à T .**

On forme « l'équation de la courbe – équation de la tangente » (c'est-à-dire que l'on considère la différence entre l'expression de la fonction et l'équation de la tangente). On va écrire l'expression mathématique qui correspond à cette différence.

$$\text{On pose } h(x) = x^3 - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2.$$

D'après le a), $h(x) = d(x)$ donc $h(x) = (x-1)^2(x+2)$.

On peut donc étudier le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x à l'aide d'un tableau de signes.

| x | $-\infty$ | -2 | 1 | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|------|-----|-----------|
| Signe de $(x-1)^2$ | + | + | 0 | + |
| Signe de $x+2$ | - | 0 | + | + |
| Signe de $d(x)$ | - | 0 | + | + |

Positions relatives de \mathcal{C} et T :

On emploie le vocabulaire usuel, proche du langage courant, avec les mots « au-dessus », « au-dessous ».

- \mathcal{C} est strictement au-dessus de T sur les intervalles $]-2; 1[$ et $]1; +\infty[$ *;
- \mathcal{C} est strictement au-dessous de T sur l'intervalle $]-\infty; -2[$;
- \mathcal{C} et T sont sécantes aux points d'abscisses -2 et 1 .

* On peut aussi dire : « \mathcal{C} est strictement au-dessus de T sur $]-2; 1[\cup]1; +\infty[$ ».

La phrase « \mathcal{C} est strictement au-dessus de T sur les intervalles $]-2; 1[$ et $]1; +\infty[$ » peut être remplacée par « \mathcal{C} est strictement au-dessus de T sur $]-2; 1[\cup]1; +\infty[$ ».

Le « et » peut être remplacé par un signe « union » \cup .

On peut présenter toute l'étude dans un tableau selon le modèle ci-dessous.

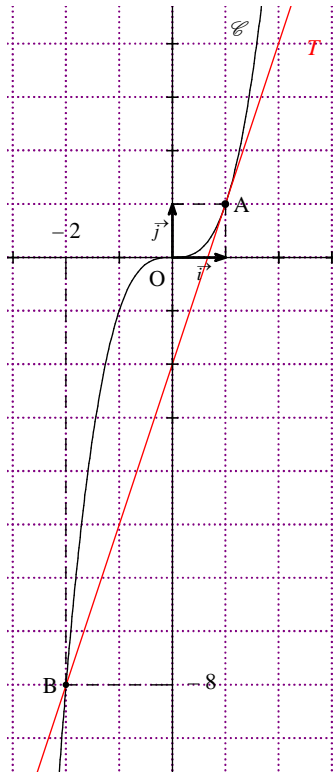
| x | $-\infty$ | -2 | 1 | $+\infty$ | |
|---|---|--|--|--|--|
| Signe de $(x-1)^2$ | + | + | 0 | + | |
| Signe de $x+2$ | - | 0 | + | + | |
| Signe de $d(x)$ | - | 0 | 0 | + | |
| Position de \mathcal{C} par rapport à T | \mathcal{C} est strict. au-dessous de T | \mathcal{C} et T sont sécantes*** au point d'abscisse -2 | \mathcal{C} est strict. au-dessus de T | \mathcal{C} et T sont sécantes au point d'abscisse 1 * | \mathcal{C} est strict. au-dessus de T |

* On peut aussi dire que \mathcal{C} et T sont tangentes au point d'abscisse 1.

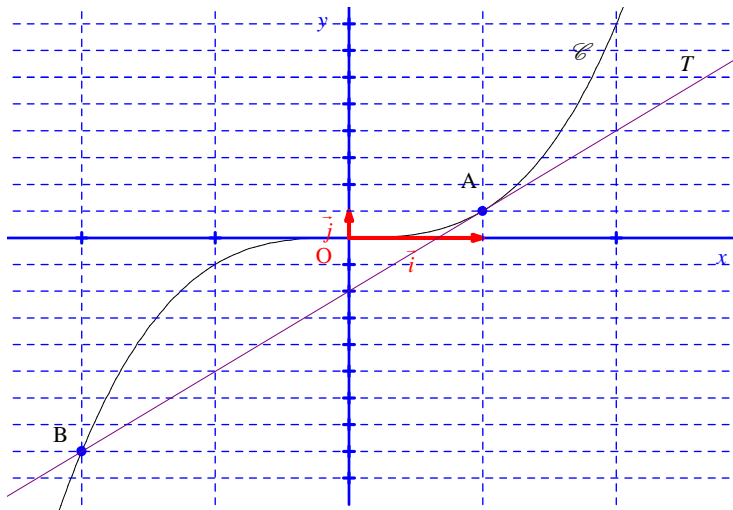
** On peut dire que deux courbes sont sécantes ou que deux courbes se coupent.

*** On peut aussi que T recoupe \mathcal{C} au point d'abscisse -2 .

4°) **Tracé**



Il est possible d'effectuer la représentation graphique dans un repère qui n'est pas orthonormé mais seulement orthogonal.



On retrouve bien graphiquement le résultat que l'on avait obtenu algébriquement dans la question précédente.

Vocabulaire :

On dit que T « recoupe » \mathcal{C} en A .

7 $f: x \mapsto x^2$ (f est la fonction « carré »)

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

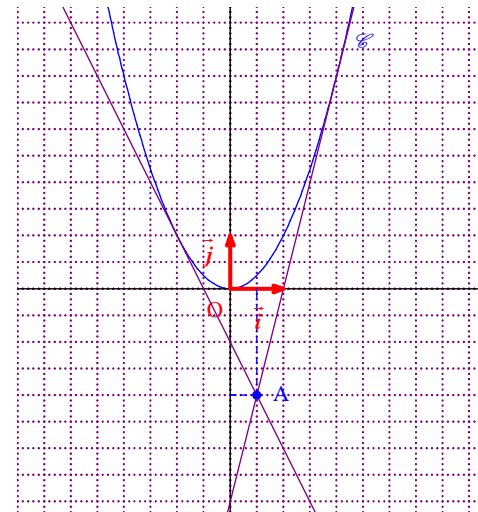
\mathcal{C} : courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

$A\left(\frac{1}{2}; -2\right)$

On observe sur le graphique que le point A n'est pas situé sur la courbe \mathcal{C} .
Le point A est *extérieur* à \mathcal{C} .

D'après le graphique, il semble qu'il y ait deux tangentes à \mathcal{C} passant par le point A (on peut les tracer approximativement ; on est dans une démarche expérimentale).

On peut avoir une idée avec la règle au début de l'exercice. Le but de l'exercice est de déterminer les points par le calcul.



1°) **Démontrons que l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} en un point M d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$) s'écrit**

$$y = 2ax - a^2.$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$.

L'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} en un point M d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$) s'écrit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$$\text{soit } y = 2a(x-a) + a^2 \text{ soit } y = 2ax - a^2.$$

Ceci est l'équation réduite générale des la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse a .

2°) **Déterminons pour quelles valeurs de a la tangente T passe par le point A .**

On va traduire que $A \in T$.

$$A \in T \text{ si et seulement si } y_A = 2ax_A - a^2$$

$$\text{si et seulement si } -2 = 2a \times \frac{1}{2} - a^2$$

$$\text{si et seulement si } -2 = a - a^2$$

$$\text{si et seulement si } a^2 - a - 2 = 0$$

$$\text{si et seulement si } a = -1 \text{ (racine évidente) ou } a = 2 \text{ (obtenue par produit)}$$

Rappel :

Le produit des racines d'une équation du second degré de la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) est égal à $-\frac{\gamma}{\alpha}$.

Conclusion :

Il existe deux tangentes à \mathcal{C} passant par A . Les points de contact ont pour abscisses respectives -1 et 2 .

On peut à présent tracer précisément les deux tangentes en plaçant les points d'abscisses -1 et 2 .

Le tracé des tangentes passant par A peut alors se faire de manière exacte sur le graphique :

- on commence par placer les points U et V de \mathcal{C} d'abscisses respectives -1 et 2 ;
- on joint U et V au point A .

Les droites (AU) et (AV) sont les tangentes à \mathcal{C} passant par A .

U et V s'appellent les points de contact ou de tangence.

3°) **Écrivons les équations réduites des tangentes qui passent par A .**

Les tangentes à \mathcal{C} qui passent par A ont pour équations réduites $y = -2x - 1$ (tangente au point d'abscisse -1) et $y = 4x - 4$ (tangente au point d'abscisse 2).

On peut marquer les points de contact U et V des deux tangentes avec la courbe.

U a pour abscisse -1 et V a pour abscisse 2 .

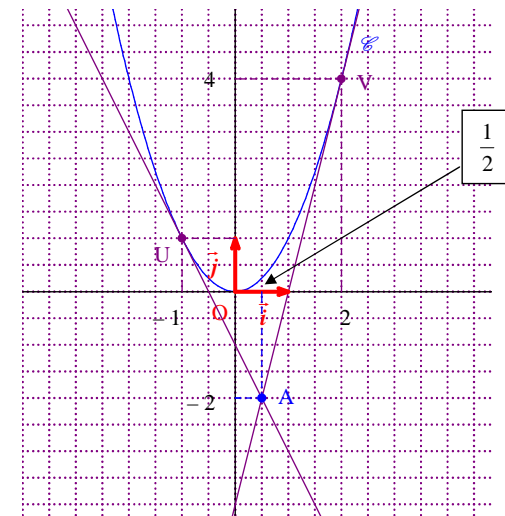
Bilan de cet exercice :

Il faut savoir refaire cet exercice dans une version sèche où seule serait posée la question :

« Déterminer les tangentes à \mathcal{C} passant par le point $A\left(\frac{1}{2}; -2\right)$. »

Voici le plan des principales étapes de résolution :

- ① dérivée de f
- ② équation générale d'une tangente
- ③ traduction de l'appartenance de A



Commentaires

Dans les exercices **1** et **2**, les expressions « dérivée de la fonction » ou « fonction dérivée » sont synonymes.

Classification des exercices par savoir-faire

Retenir la rédaction pour l'équation d'une tangente :

T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = 2(x-1) + 1$ ou encore $y = 2x - 1$.

1. On applique le « principe de séparation des calculs » c'est-à-dire que l'on calcule à part $f(1)$ et $f'(1)$ de manière à ne pas avoir une quantité énorme de calculs dans l'équation.
2. On applique la formule en situation (pas de formule générale déconnectée du contexte, avec des notations qui n'ont pas été précisées).
3. Attention aux articles. On peut dire que l'on a obtenu une équation de la tangente T ou que l'on a obtenu l'équation réduite de la tangente T .
4. Deux erreurs de présentation

Ne pas écrire les calculs en lignes : $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$.

Ou encore en colonne

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1) + 1 \\ &= 2x - 2 + 1 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

En effet, dans une équation de droite, la lettre y ne désigne pas une quantité.

5. Attention, on ne dit pas que l'on calcule une équation de droite. On dit que l'on détermine une équation de droite.
6. On évite d'écrire $T: y = \dots$ dans une rédaction. On réserve ce type de notation aux graphiques ou aux hypothèses.