1ère S

Exercices sur le nombre dérivé d'une fonction (1)

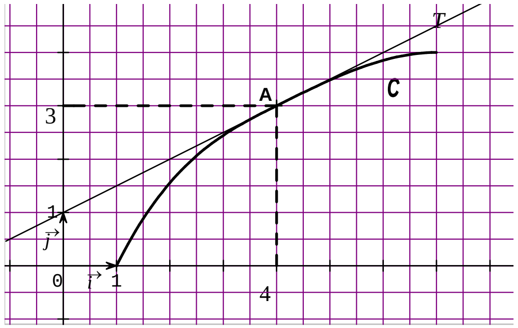
1 On considère la fonction $f : x \mapsto 4x - x^2$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. On admet que la fonction f est dérivable en 3 et que le nombre dérivé de f en 3 est égal à – 2.
On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 3 et l'on note la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A.

1°) Recopier et compléter la phrase permettant de définir T :

« T est la droite passant par … et de coefficient directeur … . »

2°) Tracer $\mathcal{C}$ sur un graphique (en prenant le centimètre pour unité graphique).
Placer ensuite le point A et tracer T en rouge.
Vérifier en effectuant le tracé sur la calculatrice graphique.

2 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 4 et la droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 4.



• Reproduire le graphique ci-contre en prenant le centimètre pour unité graphique.

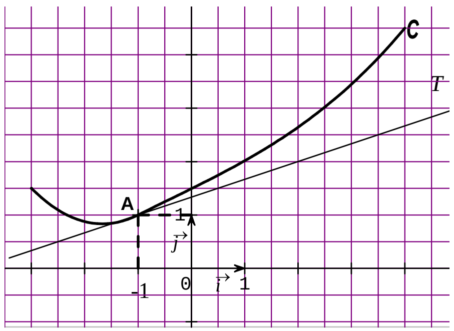
• Recopier et compléter la phrase suivante :

Le coefficient directeur de T est : …… .

• En déduire la valeur du nombre dérivé de f en 4.

Le nombre dérivé de f en 4 est égal à …………… .

3 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en – 1 et la droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse – 1.



• Reproduire le graphique ci-contre.

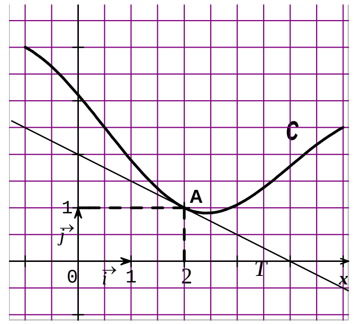
• Recopier et compléter la phrase :

Le coefficient directeur de T est : …… .

• En déduire la valeur du nombre dérivé de f en – 1.

Le nombre dérivé de f en – 1 est égal à …………… .

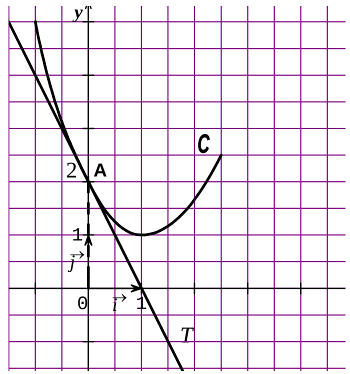
4 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 2 et la droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.



Reproduire le graphique ci-contre.

Même question avec le nombre dérivé de f en 2.

5 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 0 et la droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.



• Reproduire le graphique ci-contre.

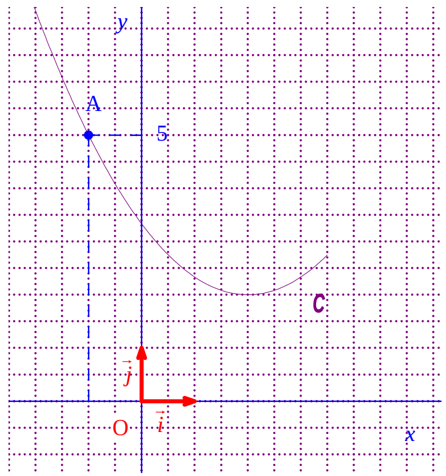
• Recopier et compléter la phrase :

Le coefficient directeur de T est : …… .

• En déduire la valeur du nombre dérivé de f en 0.

Le nombre dérivé de f en 0 est égal à …………… .

6 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en – 1.
On sait que tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse – 1 a pour équation $y = -2x + 3$.



Reproduire le graphique ci-contre.

1°) **Tracer T sur le graphique.**

2°) **Donner la valeur du nombre dérivé de f en – 1.**

$\boxed{7}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - x$.

1°) **Calculer $f(2)$.**

2°) Soit h un réel non nul.

Calculer $f(2+h)$ puis $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ en fonction de h sous forme simplifiée.

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $2+h$ où h est un réel non nul.

Que représente le quotient $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour la droite (AM) ?

$\boxed{8}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

1°) **Calculer $f(1)$.**

2°) Soit h un réel non nul différent de – 1.

Calculer $f(1+h)$ puis $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ sous forme simplifiée.

$\boxed{9}$ **Déterminer à l'aide de la calculatrice le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 4$ en – 1.**

Corrigé

1 On considère la fonction $f : x \mapsto 4x - x^2$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. On admet que la fonction f est dérivable en 3 et que le nombre dérivé de f en 3 est égal à – 2.
On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 3.

1°) **Recopier et compléter la phrase :**

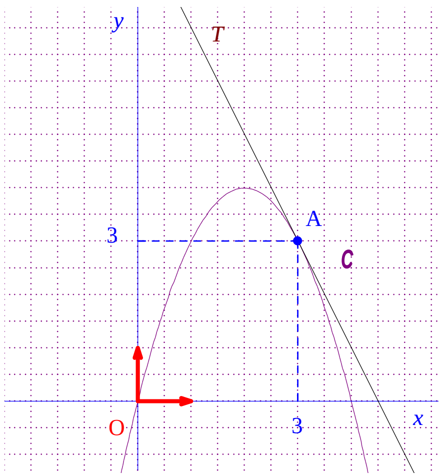
« La tangente T à $\mathcal{C}$ au point A est la droite passant par **A** et de coefficient directeur **– 2**. »

Cette phrase définit la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

2°) **Tracer $\mathcal{C}$ sur un graphique (en prenant le centimètre pour unité graphique).**
Placer ensuite le point A et tracer *T* en rouge.
Vérifier en effectuant le tracé sur la calculatrice graphique.

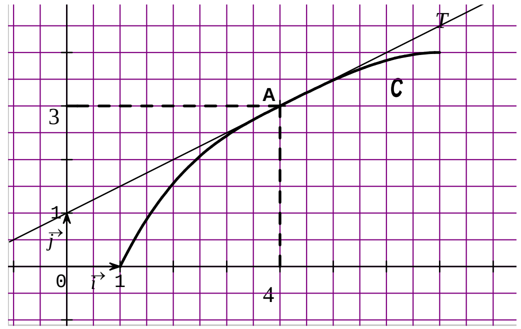
La tangente T à $\mathcal{C}$ au point A admet pour coefficient directeur – 2 donc T admet $\vec{u}(1\,;-2)$ pour vecteur directeur.

On peut aussi faire la construction en triangle sans parler de vecteur directeur.
Mais le fait de parler de vecteur directeur est plus clair.



Méthode : on oublie la courbe et l'on regarde la tangente comme une droite normal.

2 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 4 et la droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.



• Reproduire le graphique ci-contre en prenant le centimètre pour unité graphique.

• Recopier et compléter la phrase suivante :

Le nombre dérivé de f en 4 est égal au **coefficient directeur de *T***.

• En déduire par lecture graphique la valeur du nombre dérivé de *f* en 4.

On observe que le vecteur $\vec{u}(2\,;1)$ est un vecteur directeur de T.

Le nombre dérivé de f en 4 est égal à $\frac{1}{2}$.

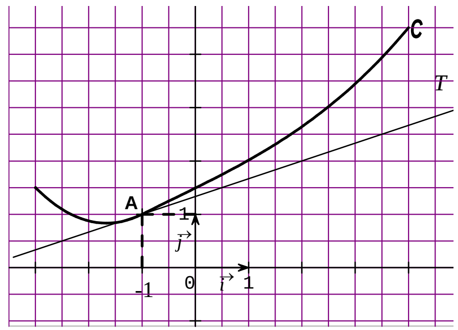
Point-méthode :

Pour déterminer graphiquement un nombre dérivé ?

- par rapport à la courbe ? …………. Non

- par rapport à a tangente ? ……….. Oui

3 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en – 1 et la droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse – 1.



• Reproduire le graphique ci-contre.

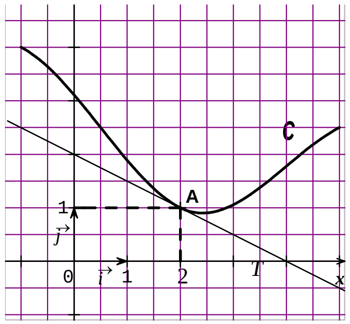
• Recopier et compléter la phrase :

Le nombre dérivé de f en – 1 est égal au **coefficient directeur de *T***.

• En déduire par lecture graphique la valeur du nombre dérivé de *f* en – 1.

Le nombre dérivé de f en – 1 est égal à $\frac{1}{3}$.

4 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* dérivable en 2 et la droite *T* est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.

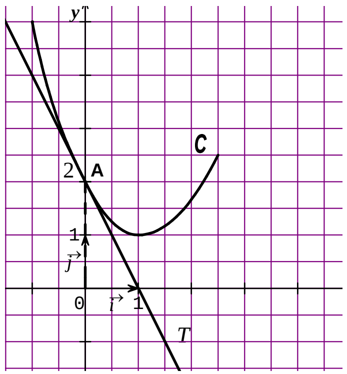


Reproduire le graphique ci-contre.

Même question avec le nombre dérivé de *f* en 2.

Le nombre dérivé de *f* en 2 est égal à $-\frac{1}{2}$.

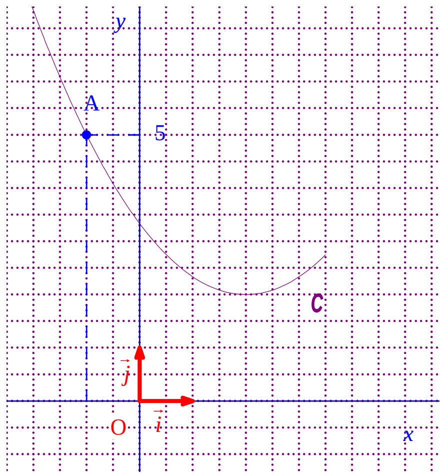
5 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* dérivable en 0 et la droite *T* est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.



Reproduire le graphique ci-contre.

Même question avec le nombre dérivé de *f* en 0.
Le nombre dérivé de *f* en 0 est égal à – 2.

6 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* dérivable en – 1.
On sait que tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse – 1 a pour équation $y=-2x+3$.



Reproduire le graphique ci-contre.

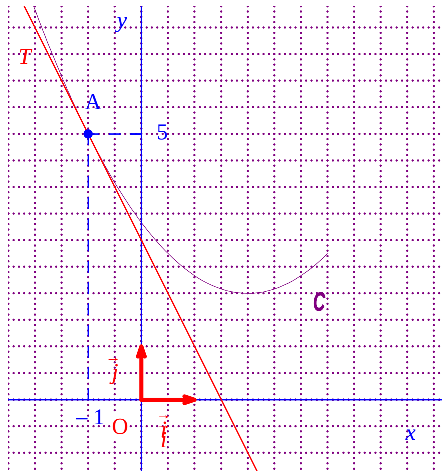
T : tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse – 1

T : $y=-2x+3$

1°) **Tracer *T* sur le graphique.**

Pour tracer la droite *T*, on fait un petit tableau de valeurs.

x	– 1	0
y	5	3



2°) **Donner la valeur du nombre dérivé de *f* en – 1.**

T a pour équation $y=-2x+3$ donc le coefficient directeur de *T* est égal à – 2 (il n'y a pas de calcul à faire).

Par suite, le nombre dérivé de *f* en – 1 est égal à – 2.

7 $f : x \mapsto x^2 - x$

1°) **Calculons $f(2)$.**

$$f(2)=2^2-2$$
$$=2$$

2°) $h \neq 0$

Calculons $f(2+h)$.

$$f(2+h)=(2+h)^2-(2+h)$$
$$=2^2+2\times 2h\times 2+h^2-2-h$$
$$=4+4h+h^2-2-h$$
$$=h^2+3h+2$$

Calculons $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\left(h^2+3h+2\right)-2}{h}$$

$$=\frac{h^2+3h}{h}$$

$$=\frac{\cancel{h}(h+3)}{\cancel{h}}$$ (on parle d'évanouissement des « h »)

$$=h+3$$

Ce quotient s'appelle le taux de variation de *f* entre 2 et $2+h$ (rapport de Newton).
On a obtenu la forme simplifiée de ce taux de variation car on a simplifié le h « solitaire » présent au dénominateur dans la forme initiale.

$\boxed{8}$ **$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$**

1°) **Calculons $f(1)$.**

$f(1)=1$

2°) $h \neq 0$; $h \neq -1$

Calculons $f(1+h)$.

$f(1+h)=\dfrac{1}{1+h}$ (on ne peut pas aller plus loin)

Calculons $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\dfrac{1}{1+h}-1}{h}$$

$$=\frac{\dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}-h}{1+h}}{h}$$

$$\frac{1}{1+h}-1=\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}=\frac{1}{1+h}-\frac{1\times(1+h)}{1\times(1+h)}=\frac{1}{1+h}-\frac{1+h}{1+h}=\frac{1-(1+h)}{1+h}=\frac{1-1-h}{1+h}$$

$$=\frac{-\dfrac{h}{1+h}}{h}$$

$$=-\frac{\cancel{h}}{1+h}\times\frac{1}{\cancel{h}}$$ (évanouissement des « h »)

$$=-\frac{1}{1+h}$$

Ce quotient s'appelle le taux de variation de *f* entre 1 et $1+h$ (rapport de Newton).
On a obtenu la forme simplifiée de ce taux de variation car on a simplifié le h « solitaire » présent au dénominateur dans la forme initiale.

$\boxed{9}$ **Déterminer à l'aide de la calculatrice le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2-3x+4$ en – 1.**

Sur calculatrice TI 83 Plus :

On utilise la commande de la calculatrice pour obtenir le nombre dérivé (touche $\boxed{\text{math}}$ puis MATH et sélectionner 8).

Il n'y a pas besoin de tracer la courbe représentative.

nombreDérivé(X^2-3X+4, X, – 1) ou nDeriv(X^2-3X+4, X, – 1)

$$\frac{d}{d\boxed{X}}\left(\boxed{X^2-3X+4}\right)\Big|_{X=\boxed{-1}}$$

On appuie sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

On obtient – 5.

Avec la calculatrice, on trouve que le nombre dérivé de *f* en – 1 est égal à – 5.