Exercices sur les expériences aléatoires à plusieurs épreuves

1 On tire successivement au hasard avec remise deux cartes dans un jeu de 32 cartes.

1°) Calculer la probabilité des événements :
A : « le tirage donne un roi suivi d'un pique » ;
B : « le tirage donne un pique suivi d'un roi ».

2°) Reprendre la question précédente dans le cas d'un tirage sans remise.

2 Quatre amis se rendent dans un complexe de quatre salles de cinéma.
Chacun choisit au hasard un film, indépendamment des autres.
On s'intéresse à leur répartition dans les salles.
Chaque répartition est équiprobable.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « ils sont dans des salles différentes » ;
B : « au moins deux sont dans la même salle » ;
C : « ils sont tous dans la même salle ».

3 On lance trois fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note $(x\,;y\,;z)$ le triplet obtenu.

1°) Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2°) Déterminer la probabilité des événements suivants :
- A : « $x=y=z$ » ;
- B : « x, y et z sont deux à deux distincts » ;
- C : « $x+y+z=3$ » ;
- D : « $x=1$ » ;
- $A \cap D$;
- $B \cap C$;
- $A \cup D$;
- $B \cup C$.

4 Trois personnes prennent l'ascenseur au rez-de-chaussée. Cet ascenseur dessert cinq étages.

1°) **Modélisation**
Chaque personne descend à l'un des cinq étages, on peut donc lui associer un numéro d'étages de 1 à 5. Une issue est représentée par une suite de trois numéros d'étages. Combien de suites peut-on obtenir ?
2°) Calculer la probabilité de l'événement E : « toutes descendent au même étage ».
3°) On note F l'événement : « Une personne au moins descend au 5e étage. »
a) Définir l'événement contraire de F.
b) Calculer la probabilité de l'événement contraire de F. En déduire la probabilité de F.

5 Le code secret d'un coffre-fort est constitué de 3 chiffres (entre 0 et 9).
Une personne compose au hasard un code.

Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « le code est le bon » ;
B : « le code est formé de trois chiffres deux à deux distincts (c'est-à-dire tous différents) » ;
C : « le code comporte deux chiffres identiques et deux seulement ».

6 Une machine à sous au casino se compose de quatre tambours cylindriques. Sur chacun d'eux apparaît de manière aléatoire un chiffre entre 1 et 8.
Si au moins trois des quatre chiffres sont identiques, le joueur gagne.

Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Les quatre chiffres sont identiques » ;
B : « Trois exactement des quatre chiffres sont identiques » ;
C : « Le joueur a perdu ».

7 **Problème du Grand Duc de Toscane**

Le jeu de "passe-dix" consiste à jeter 3 dés, on gagne si la somme des points dépasse 10. Le chevalier de Méré constatait qu'en pratique on gagnait plus souvent avec 11 qu'avec 12.

Cela contredisait le raisonnement, que voici :

« Il y a 6 possibilités de marquer 11 points : {4, 4, 3} ; {5, 3, 3} ; {5, 4, 2} ; {5, 5, 1} ; {6, 3, 2} ; {6, 4, 1} et six possibilités de marquer 12 points : {4, 4, 4} ; {5, 4, 3} ; {5, 5, 2} ; {6, 3, 3}; {6, 4, 2} ; {6, 5, 1}.
Donc la probabilité de marquer 11 est égale à celle de marquer 12. »

L'erreur du chevalier et de s'en tenir aux issue observables et de les croire équiprobables. Or si l'on veut des issues équiprobables il faut distinguer les dés.

1°) Vérifier qu'en distinguant les dés, il y a par exemple six façons d'obtenir 5, 4 et 3.
2°) Vérifier qu'il y a vingt-cinq façons d'obtenir 12 et vingt-sept d'obtenir 11.
3°) En déduire la probabilité d'obtenir 12 et celle d'obtenir 11. Comparer les deux résultats.

8 Dans une boîte, il y a quatre jetons numérotés 1, 2, 3, 4.
On tire simultanément au hasard deux jetons.

1°) Écrire toutes les issues possibles.
2°) On note A l'événement « les deux jetons portent un numéro pair ».
Donner la liste des issues formant A puis $\overline{A}$.
3°) On note B l'événement « la somme des numéros des jetons est paire ».
Donner la liste des issues formant B et $\overline{B}$.

9 Une urne contient $n+8$ boules : 8 boules blanches et n boules noires (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire successivement avec remise deux boules de l'urne et examine leurs couleurs.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5 €, mais pour chaque boule noire tirée, il perd 10 €.
On note G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en euros sur un tirage.
1°) Quelles sont les valeurs possibles de G ?
2°) Donner la loi de probabilité de G (en fonction de n).
3°) Démontrer que $E(\text{G})=\dfrac{20(4-n)}{8+n}$.
4°) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n le jeu est équitable.

Corrigé

1 1°) **Tirage successif avec remise**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

On commence par calculer le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

On utilise la méthode des cases.

1er tirage	2^{e} tirage
32	**32**

Il y a 32^2 $(= 1024)$ résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

A : « le tirage donne un roi suivi d'un pique »

1er tirage	2^{e} tirage
4	**8**
car 4 rois	car 8 piques

Il y a $4 \times 8 = 32$ résultats possibles pour A.

On applique la formule de Laplace.

$$P(\mathrm{A}) = \frac{32}{32^2} = \frac{1}{32}$$

B : « le tirage donne un pique suivi d'un roi »

Il y a $8 \times 4 = 32$ résultats possibles pour B.

$$P(\mathrm{B}) = \frac{32}{32^2} = \frac{1}{32}$$

On observe que $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$.

2°) **Tirage successif sans remise**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

On commence par calculer le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

On utilise la méthode des cases.

1er tirage	2^{e} tirage
32	**31**

Il y a 32×31 $(= 992)$ résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

A : « le tirage donne un roi suivi d'un pique »

On est obligé de distinguer deux cas selon que le roi que l'on tire est le roi de pique ou un roi qui n'est pas le roi de pique. Pour dénombrer les possibilités pour A, il faut distinguer deux cas.

Pour réaliser A, il y a deux possibilités :

1ère possibilité : on tire un roi autre que le roi de pique (il y a 3 possibilités) puis un pique (il y a 8 possibilités).
2^{e} possibilité : on tire le roi de pique (il y a 1 possibilité) puis un pique (il y a 7 possibilités).

Ces deux possibilités sont incompatibles (s'excluent mutuellement) donc on additionne les nombres de possibilités.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{A}) &= \frac{3 \times 8 + 1 \times 7}{32 \times 31} \\ &= \frac{\cancel{31}}{\cancel{31} \times 32} \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

B : « le tirage donne un pique suivi d'un roi »

$$\begin{aligned} P(\mathrm{B}) &= \frac{7 \times 4 + 1 \times 3}{32 \times 31} \\ &= \frac{\cancel{31}}{\cancel{31} \times 32} \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

On constate que les résultats sont les mêmes que pour les tirages avec remise.

Commentaire général sur tout l'exercice :

Dans les deux cas, on a appliqué la formule de Laplace pour calculer les probabilités.
Une méthode utilisant le produit de deux probabilités sera explicitée ultérieurement (en écrivant $P(\mathrm{A}) = P(\text{«tirer un roi »}) \times P(\text{«tirer un pique »})$).

Nous verrons plus tard comment multiplier des probabilités.

$\boxed{2}$ Répartition dans des salles de cinéma

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

On commence par calculer le nombre de répartitions dans les quatre salles.

Ami 1	Ami 2	Ami 3	Ami 4
4	**4**	**4**	**4**

Le nombre de répartitions des 4 amis dans les 4 salles est $4\times4\times4\times4=4^4$

À chaque ami, on associe une salle de cinéma (et pas l'inverse, on n'associe pas aux salles les amis).

A : « les quatre amis sont dans des salles différentes ».

Dans le cas où A est réalisé, le premier ami a 4 choix possibles, le deuxième en a 3, le troisième en a 2 et le quatrième en a 1. On pourrait faire la méthode des cases pour déterminer le nombre de cas possibles pour A.

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A})&=\frac{4\times3\times2\times1}{4^4}\\&=\frac{6}{4^3}\\&=\frac{3}{32}\end{aligned}$$

B : « au moins deux amis sont dans la même salle ».

$\mathrm{B}=\overline{\mathrm{A}}$ (B est l'événement contraire de A)
On trouve cela par « logique ». La négation de « les quatre amis sont dans des salles différentes » est « au moins deux amis sont dans la même salle ».
Attention, ce type de raisonnement est très important.

$$\begin{aligned}P(\mathrm{B})&=1-P(\mathrm{A})\\&=1-\frac{3}{32}\\&=\frac{29}{32}\end{aligned}$$

C : « les quatre amis sont tous dans la même salle ».

$$\begin{aligned}P(\mathrm{C})&=\frac{4}{4^4}\\&=\frac{1}{4^3}\\&=\frac{1}{64}\end{aligned}$$

Attention, à la logique naturelle trompeuse.

Du point de vue de la logique naturelle, on aurait plutôt tendance à dire que le contraire de l'événement C est A.
Du point de vue mathématique, on dira bien que le contraire de l'événement B est A.

$\boxed{3}$ Lancers successifs d'un dé cubique non truqué trois fois de suite

1°) Nombre d'issues possibles :

1er lancer	2e lancer	3e lancer
6	**6**	**6**

Il y a 6^3 résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

2°) Calculs de probabilités :

• A : « $x=y=z$ »

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A})&=\frac{6\times1\times1}{6^3}\\&=\frac{1}{6^2}\\&=\frac{1}{36}\end{aligned}$$

• B : « x, y et z sont deux à deux distincts »

L'événement B signifie « $x\neq y$ **et** $y\neq z$ **et** $z\neq x$ ».

$$\begin{aligned}P(\mathrm{B})&=\frac{6\times5\times4}{6^3}\\&=\frac{20}{36}\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

• C : « $x+y+z=3$ »

Le seul résultat qui permette de réaliser l'événement C est (1 ; 1 ; 1).

$$\mathrm{C}=\{(1;1;1)\}$$

$$\begin{aligned}P(\mathrm{C})&=\frac{1}{6^3}\\&=\frac{1}{216}\end{aligned}$$

• D : « $x=1$ »

$$P(\mathrm{D})=\frac{1\times6\times6}{6^3}$$
$$=\frac{1}{6}$$

• A ⋂ D : « $x=y=z$ et $x=1$ »

$\mathrm{A}\cap\mathrm{D}=\{(1;1;1)\}$ (accolades pour l'ensemble et parenthèses pour le triplet)

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})=\frac{1}{216}$$

• B ⋂ C : « $x\neq y$ et $y\neq z$ et $z\neq x$ et $x+y+z=3$ »

$\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\varnothing$

B et C sont incompatibles.

$P(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=0$

• A ∪ D

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{D})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{D})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}-\frac{1}{216}$$
$$=\frac{6+36-1}{216}$$
$$=\frac{41}{216}$$

• B ∪ C

$$P(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=P(\mathrm{B})+P(\mathrm{C})-P(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$$
$$=\frac{5}{9}+\frac{1}{216}-0$$
$$=\frac{121}{216}$$

$\boxed{4}$

1°) Le nombre de suites possibles est égal à : $5^3=125$ (méthode des cases).

Pour tous les calculs de probabilités, nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

2°) **E : « toutes les personnes descendent au même étage »**

$$P(\mathrm{E})=\frac{5\times1\times1}{5^3}$$
$$=\frac{1}{25}$$

3°) **F : « Une personne au moins descend au 5e étage »**

a) **Définissons $\overline{\mathrm{F}}$.**

On peut formuler de deux manières l'événement contraire de F.

$\overline{\mathrm{F}}$: « aucune personne ne descend au 5e étage » ou « toutes les personnes descendent aux étages 1 à 4 ».

b) **Calculons $P\left(\overline{\mathrm{F}}\right)$ et déduisons-en $P(\mathrm{F})$.**

$$P\left(\overline{\mathrm{F}}\right)=\frac{4^3}{5^3}=\frac{64}{125}$$

Par suite,

$$P(\mathrm{F})=1-P\left(\overline{\mathrm{F}}\right)=1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}$$

$\boxed{5}$ Le code secret d'un coffre-fort est formé de 3 chiffres (entre 0 et 9).

Une personne compose au hasard un code.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

Nombre d'issues possibles :

1er chiffre	2e chiffre	3e chiffre
10	**10**	**10**

De 0 à 9, on compte 10 chiffres.

Il y a 10^3 résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

• A : « le code est le bon »

Il y a un seul résultat possible pour A.

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A}) &= \frac{1}{10^3}\\ &= \frac{1}{1000}\\ &= 0{,}001\end{aligned}$$

• B : « le code est formé de trois chiffres deux à deux distincts »

(« deux à deux distincts » signifie « tous différents »)

1^{er} chiffre	2^{e} chiffre	3^{e} chiffre
10	**9**	**8**

Attention, dans chaque case, il s'agit du nombre de choix possibles.
Pour le 1^{er} chiffre, il y a 10 choix possibles.
Pour le 2^{e} chiffre, il y a 9 choix possibles.
Pour le 3^{e} chiffre, il y a 8 choix possibles.

Le nombre d'issues possibles pour B est égal à $10 \times 9 \times 8$ $(= 720)$.

$$\begin{aligned}P(\mathrm{B}) &= \frac{10\times9\times8}{10^3}\\ &= \frac{9\times8}{10^2}\\ &= \frac{72}{100}\\ &= 0{,}72\end{aligned}$$

($P(\mathrm{B})$ est nettement plus grande que $P(\mathrm{A})$).

• C : « le code comporte deux chiffres identiques et deux seulement ».

⚠ Il y a une disjonction de cas à faire.
Pour dénombrer les issues possibles pour C, on est obligé de distinguer 3 cas (on raisonne par **disjonction de cas**). Il faut « décomposer ».

1^{er} cas : les deux premiers chiffres sont égaux

$10 \times 1 \times 9$ possibilités

2^{e} cas : le 1^{er} et le 3^{e} chiffres sont égaux

$10 \times 9 \times 1$ possibilités

3^{e} cas : le 2^{e} et le 3^{e} chiffres sont égaux

$9 \times 10 \times 1$ possibilités

On fait la somme des trois résultats.

$$\begin{aligned}P(\mathrm{C}) &= \frac{3\times10\times9\times1}{10^3}\\ &= \frac{27}{100}\\ &= 0{,}27\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

8	**8**	**8**	**8**

Il y a 8^4, soit 4 096, issues possibles pour l'expérience aléatoire.

A : « Les quatre chiffres sont identiques »

8	**1**	**1**	**1**

Le nombre d'issues possibles pour A est égal à 8.

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A}) &= \frac{8}{8^4}\\ &= \frac{1}{8^3}\\ &= \frac{1}{512}\end{aligned}$$

B : « Trois exactement des quatre chiffres sont identiques »

Il y a quatre possibilités de chiffres identiques :
- chiffres 1, 2, 3 identiques
- chiffres 1, 3, 4 identiques
- chiffres 1, 2, 4 identiques
- chiffres 2, 3, 4 identiques

8	1	1	7

$$P(\text{B})=\frac{8\times7\times1\times1+8\times7\times1\times1+8\times7\times1\times1+8\times7\times1\times1}{8^4}$$
$$=\frac{4\times8\times7}{8^4}$$
$$=\frac{4\times7}{8^3}$$
$$=\frac{7}{2\times8^2}$$
$$=\frac{7}{128}$$

C : « Le joueur a perdu »

$\text{C}=\overline{\text{A}\cup\text{B}}$

Donc $P(\text{C})=P\left(\overline{\text{A}\cup\text{B}}\right)$
$=1-P(\text{A}\cup\text{B})$
$=1-\left[P(\text{A})+P(\text{B})\right]$ (car les événements A et B sont incompatibles)
$=\dfrac{483}{512}$

$\boxed{7}$ Problème du Grand Duc de Toscane

1°) **En distinguant les dés, il y a six façons d'obtenir 5, 4 et 3.**

On écrit des triplets :

(5 ; 4 ; 3) ; (4 ; 3 ; 5) ; (5 ; 3 ; 4) ; (3 ; 4 ; 5) ; (4 ; 5 ; 3) ; (3 ; 5 ; 4).

(il y a 6 permutations possibles)

Cette question prépare uniquement au raisonnement de la question d'après.

2°) **Vérifions qu'il y a vingt-cinq façons d'obtenir 12 et vingt-sept d'obtenir 11.**

IL faut bien comprendre l'énoncé : le nombre de façons d'obtenir 12 correspond au nombre de triplets d'entiers naturels compris entre 1 et 6 dont la somme est égale à 12.

On écrit la liste des triplets pour chaque somme.

Somme égale à 12	Somme égale à 11
(5 ; 4 ; 3)	(6 ; 4 ; 1)
(5 ; 3 ; 4)	(6 ; 1 ; 4)
(3 ; 4 ; 5)	(4 ; 1 ; 6)
(3 ; 5 ; 4)	(4 ; 6 ; 1)
(4 ; 3 ; 5)	(1 ; 4 ; 6)
(4 ; 5 ; 3)	(1 ; 6 ; 4)
(6 ; 5 ; 1)	(5 ; 5 ; 1)
(5 ; 6 ; 1)	(5 ; 1 ; 5)
(1 ; 6 ; 5)	(1 ; 5 ; 5)
(1 ; 5 ; 6)	(4 ; 4 ; 3)
(6 ; 1 ; 5)	(4 ; 3 ; 4)
(5 ; 1 ; 6)	(3 ; 4 ; 4)
(5 ; 5 ; 2)	(4 ; 5 ; 2)
(5 ; 2 ; 5)	(4 ; 2 ; 5)
(2 ; 5 ; 5)	(5 ; 2 ; 4)
(6 ; 3 ; 3)	(5 ; 4 ; 2)
(3 ; 6 ; 3)	(2 ; 4 ; 5)
(3 ; 3 ; 6)	(2 ; 5 ; 4)
(6 ; 2 ; 4)	(5 ; 3 ; 3)
(6 ; 4 ; 2)	(3 ; 3 ; 5)
(2 ; 6 ; 4)	(3 ; 5 ; 3)
(2 ; 4 ; 6)	(6 ; 2 ; 3)
(4 ; 6 ; 2)	(6 ; 3 ; 2)
(4 ; 2 ; 6)	(2 ; 6 ; 3)
(4 ; 4 ; 4)	(2 ; 3 ; 6)
	(3 ; 2 ; 6)
	(3 ; 6 ; 2)

Autre façon :

Triplets pour obtenir une somme égale à 12 :

(4 ; 4 ; 4) : il y a 1 permutation possible
(5 ; 4 ; 3) : il y a 6 permutations possibles
(5 ; 5 ; 2) : il y a 3 permutations possibles
(6 ; 3 ; 3) : il y a 3 permutations possibles
(6 ; 4 ; 2) : il y a 6 permutations possibles
(6 ; 5 ; 1) : il y a 6 permutations possibles

Il y a donc $1+6+3+3+6+6=25$ triplets réalisant une somme égale à 12.

Triplets pour obtenir une somme égale à 11 :

(4 ; 4 ; 3) : il y a 3 permutations possibles
(5 ; 3 ; 3) : il y a 3 permutations possibles
(5 ; 4 ; 2) : il y a 6 permutations possibles
(5 ; 5 ; 1) : il y a 3 permutations possibles
(6 ; 3 ; 2) : il y a 6 permutations possibles
(6 ; 4 ; 1) : il y a 6 permutations possibles
Il y a donc 3 + 3 + 6 + 3 + 6 + 6 = 27 triplets réalisant une somme égale à 11.

3°) **Calculs de probabilités**

Il y a $6^3 = 216$ résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

A : « obtenir une somme de 12 »

$$P(\text{A}) = \frac{25}{216}$$

B : « obtenir une somme de 11 »

$$P(\text{B}) = \frac{27}{216}$$

L'événement « obtenir une somme égale à 11 » est plus probable que l'événement « obtenir une somme égale à 12 ».

8 Tirage simultané

Le tirage est simultané. Il n'y a pas d'ordre.

1°) **Écrire toutes les issues possibles.**

Le tirage étant simultané, il faut écrire les résultats entre accolades.

{1 ; 2}, {1 ; 3}, {1 ; 4}, {2 ; 3}, {2 ; 4}, {3 ; 4}

2°) **A : « les deux jetons portent un numéro pair »**

A : {2 ; 4}

$\overline{\text{A}}$: {1 ; 2}, {1 ; 3}, {1 ; 4}, {2 ; 3}, {3 ; 4}

3°) **B : « la somme des numéros des jetons est paire »**

B : {1 ; 3}, {2 ; 4}

$\overline{\text{B}}$: {1 ; 2}, {1 ; 4}, {2 ; 3}, {3 ; 4}

9

Urne $\begin{cases} 8 \text{ B} \\ n \text{ N} \end{cases}$ $(n \geqslant 2)$; tirages successifs de deux boules avec remise

1°) **Déterminons la loi de probabilité de X.**

Le 25-11-2016

Paul Fomel (élève de 1ère S1) a noté l'explication suivante qui a été donnée au tableau.

B – N → 10 euros $\longrightarrow \dfrac{8^2}{(n+8)^2}$

B – N → 10 euros $\longrightarrow \dfrac{8 \times n}{(n+8)^2}$

N – B → – 5 euros $\longrightarrow \dfrac{n \times 8}{(n+8)^2}$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{8 \times n}{(n+8)^2} \\ \dfrac{n \times 8}{(n+8)^2} \end{array}\right\} \dfrac{16n}{(n+8)^2}$

N – N → – 20 euros $\longrightarrow \dfrac{n^2}{(n+8)^2}$

G peut prendre les valeurs : $g_1 = -20$ (tirage de deux boules noires)

$g_2 = -5$ (tirage d'une boule noire et d'une boule blanche)

$g_3 = 10$ (tirage de deux boules blanches)

2°) Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité *P*.

On commence par dénombrer le nombre de tirages possibles pour l'expérience aléatoire.
Les tirages sont effectués successivement avec remise.

1er tirage	2e tirage
$8+n$	$8+n$

Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à $(8+n)\times(8+n) = (8+n)^2$.

• **$(\mathrm{G}=g_1)$: « tirer deux boules noires »**

1^{er} tirage	2^{e} tirage
n	***n***

Le nombre de résultats possibles pour l'événement $(\mathrm{G}=g_1)$ est égal à n^2.

$$P(\mathrm{G}=g_1)=\frac{n^2}{(8+n)^2}$$

• **$(\mathrm{G}=g_2)$: « tirer une boule noire et une boule blanche »**

Il y a deux cas à envisager.

1^{er} cas : la $1^{\text{ère}}$ boule tirée est blanche et la 2^{e} boule tirée est noire

1^{er} tirage	2^{e} tirage
8	***n***

Le nombre de cas possibles dans ce cas est égal à $8n$.

2^{e} cas : la $1^{\text{ère}}$ boule est noire et la 2^{e} boule tirée est blanche

1^{er} tirage	2^{e} tirage
n	**8**

Le nombre de cas possibles dans ce cas est égal à $8n$.

Comme les deux cas sont incompatibles, on additionne les nombres de possibilité.
Le nombre de résultats possibles pour l'événement $(\mathrm{G}=g_2)$ est donc égal à $8n+8n=16n$.

$$P(\mathrm{G}=g_2)=\frac{16n}{(8+n)^2}$$

• **$(\mathrm{G}=g_3)$: « tirer deux boules blanches »**

1^{er} tirage	2^{e} tirage
8	**8**

Le nombre de résultats possibles pour l'événement $(\mathrm{G}=g_3)$ est égal à 64.

$$P(\mathrm{G}=g_3)=\frac{64}{(8+n)^2}$$

Tableau donnant la loi de probabilité de G :

g_i	-20	-5	10	
$P(\mathrm{G}=g_i)$	$\frac{n^2}{(8+n)^2}$	$\frac{16n}{(8+n)^2}$	$\frac{64}{(8+n)^2}$	Total $=1$

3°) **Espérance de G**

$$\begin{aligned}E(\mathrm{G})&=\sum_{i=1}^{i=3} g_i\times P(\mathrm{G}=g_i)\\&=-20\times\frac{n^2}{(8+n)^2}-5\times\frac{16n}{(8+n)^2}+10\times\frac{64}{(8+n)^2}\\&=\frac{-20n^2-80n+640}{(8+n)^2}\\&=\frac{-20(n^2+4n-32)}{(8+n)^2}\end{aligned}$$

Considérons le polynôme $x^2+4x-32$ $(x\in\mathbb{R})$.

Les racines de ce polynôme sont -8 et 4 (on les obtient en calculant le discriminant réduit).

Donc on obtient une factorisation du polynôme $x^2+4x-32$ en facteurs du premier degré :
$x^2+4x-32=(x+8)(x-4)$.

Donc $E(\mathrm{G})=\dfrac{-20(n+8)\times(n-4)}{(8+n)^2}$.

On obtient $E(\mathrm{G})=\dfrac{-20(n-4)}{(8+n)}$ soit $E(\mathrm{G})=\dfrac{20(4-n)}{8+n}$.

4°) **Déterminons pour quelle(s) valeur(s) de *n* le jeu est équitable.**

On cherche les entiers naturels n tel que $E\left(\mathrm{G}\right)=0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{20\left(4-n\right)}{8+n}=0$$

$4-n=0$ (car $8+n\neq 0$ puisque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 par hypothèse)

$n=4$

On en déduit que le jeu est équitable pour $n=4$ (et seulement pour cette valeur de n).