$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le vendredi 2 décembre 2011

I. Une méthode de Blaise Pascal

Soit n est un entier naturel non nul fixé.

1°) On pose $S = 1 + 2 + \ldots + n$. On peut aussi écrire $S = \sum_{k=1}^{k=n} k$.

On se propose de trouver une formule sommatoire pour calculer la somme S, en utilisant une méthode utilisée par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique* de 1654.

Il partait de la formule :

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Il écrivait les n égalités obtenues pour k prenant toutes les valeurs entières de 1 à n, les unes en dessous des autres come dans le cadre ci-dessous :

Pour k = 1	$2^2 = 1^2 + 2\times1+1$
Pour k = 2	$3^2 = 2^2 + 2\times2+1$
	…………………
Pour k = n	$(n+1)^2 = n^2 + 2\times n+1$

Il ajoutait ensuite membre à membre ces n égalités, en observant des simplifications entre deux lignes successives :

$$n \text{ égalités} \left\{ \begin{array}{l} \cancel{2^2} = 1^2 + 2\times1+1 \\ \cancel{3^2} = \cancel{2^2} + 2\times2+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^2 = \cancel{n^2} + 2\times n+1 \end{array} \right.$$

Il obtenait alors :

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2\times S + n \quad (1).$$

Recopier le dernier cadre en barrant les termes qui s'annulent.
Écrire sans expliquer l'égalité obtenue puis transformer cette égalité pour aboutir à l'égalité (1).

En déduire la formule sommatoire : $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2°) On pose $S' = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. On peut aussi écrire $S' = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

En utilisant la méthode de Pascal, mais en partant de l'égalité $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, démontrer que $S' = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Présenter les calculs dans un cadre comme au 1°) en barrant les termes qui se simplifient en diagonale en écrivant les différentes égalités pour k prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n.

3°) **Facultatif :**

Calculer $S'' = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$ en utilisant la méthode de Pascal, mais en partant du développement de $(k+1)^4$.

En déduire que $S'' = S^2$.

II. Soit ABC un triangle quelconque.
On note A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB].
Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC.
On note H le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Faire une figure sur la copie.

Tracer un triangle ABC tel que :
- tous les angles du triangle ABC soient aigus ;
- la droite (AB) horizontale, A à gauche de B et C au-dessus de la droite (AB).

Ne pas placer le point H avant la fin de la question 1°).

1°) a) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
Recopier et compléter sans démontrer les égalités suivantes : $\overrightarrow{BH} = \ldots\ \overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CH} = \ldots\ \overrightarrow{OC'}$.
b) Placer le point H sur une figure au brouillon.
c) Démontrer que (AH) $\perp$ (BC).
Recopier et compléter sans démontrer (BH) … (AC) et (CH) … (AB).
d) Que peut-on en déduire pour le point H ?

Placer H sur la figure au propre.

2°) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

On rappelle que l'on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{OH} = 3\ \overrightarrow{OG}$.

Commentaires :

Dans un triangle, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit sont alignés.

Lorsque le triangle ABC 'est pas équilatéral, ces trois points sont deux à deux distincts.
La droite passant par ces trois points est appelée la droite d'Euler* du triangle.

De plus, on connaît exactement la position de ces trois points grâce à la relation de la question 2°).

Conseils

Ne rien écrire sur l'énoncé.

I.

1°) **Écrire le cadre en haut de la 2e page de la copie (pour avoir la place de montrer les calculs qui vont suivre).**

Un exemple pour comprendre le principe des simplifications effectuées est donné dans le cas $n = 5$ au bas de cette page.

Exemple pour $n = 5$ (sans les petits points) :

$$\boxed{\begin{aligned}
\cancel{2^2} &= 1^2 + 2\times1+1\\
\cancel{3^2} &= \cancel{2^2} + 2\times2+1\\
\cancel{4^2} &= \cancel{3^2} + 2\times3+1\\
\cancel{5^2} &= \cancel{4^2} + 2\times4+1\\
6^2 &= \cancel{5^2} + 2\times5+1
\end{aligned}}$$

2°) **Écrire le cadre en haut de la 3e page de la copie.**

Bien suivre l'énoncé (sans se laisser perturber par le fait que l'on veut calculer la somme des carrés).

Écrire au moins les deux premières lignes (pour $k = 1$ et $k = 2$). Mettre des petits points.
Écrire la dernière égalité pour $k = n$.

$$\boxed{\begin{aligned}
&(1+1)^3 = \ldots\\
&(2+1)^3 = \ldots\\
&\ldots\\
&(n+1)^3 = \ldots
\end{aligned}}$$