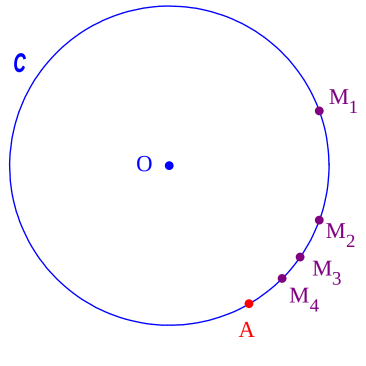
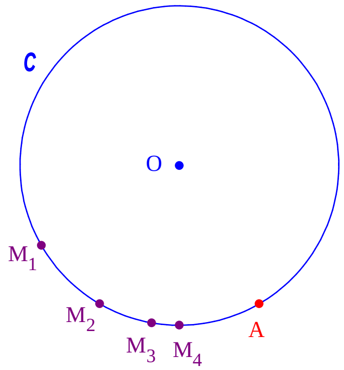
1ère S

Exercices sur la tangente à la courbe d'une fonction (approche expérimentale)

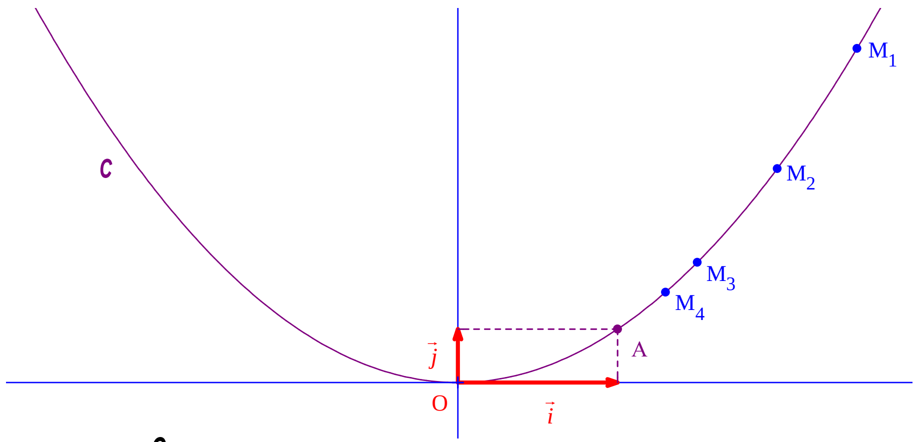
$\boxed{1}$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point fixé de $\mathcal{C}$.
Soit M un point « mobile » de $\mathcal{C}$ distinct de A.
On note M_1, M_2, M_3, M_4 plusieurs positions de M.
1°) Sur chacune des figures :
- tracer les droites (AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4) ;
- tracer la tangente Δ en A à $\mathcal{C}$ (avec le codage).

2°) Que peut-on dire de la droite (AM) lorsque M se rapproche de A ?





$\boxed{2}$ On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction « carré ».

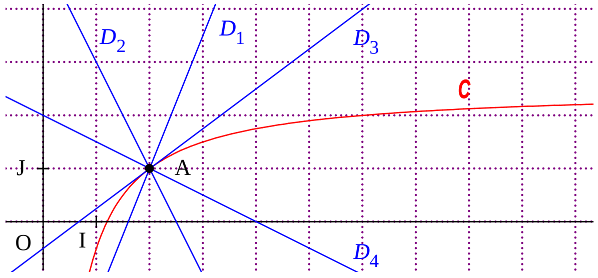


On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1.
Soit M un point « mobile » de $\mathcal{C}$ distinct de A.

On note M_1, M_2, M_3, M_4 plusieurs positions de M.
Sur le graphique, tracer les droites (AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4).

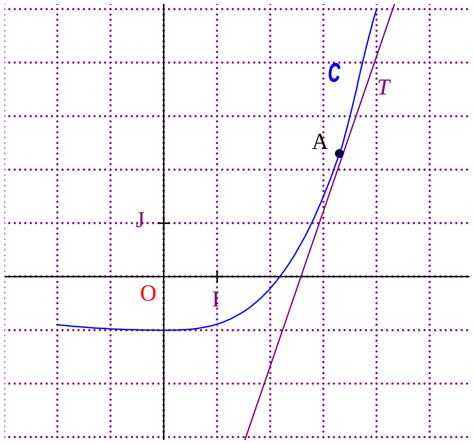
$\boxed{3}$ **Idée intuitive**

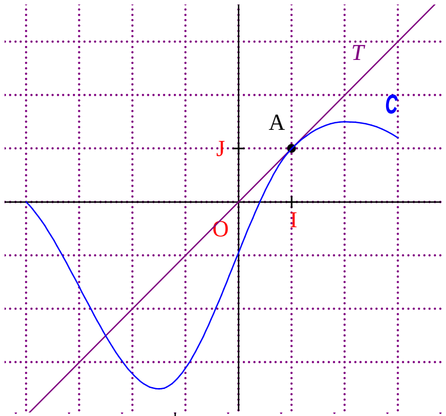
Parmi les droites D_1, D_2, D_3 et D_4 ci-dessous, quelle est celle qui correspond à l'idée intuitive d'une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A ?

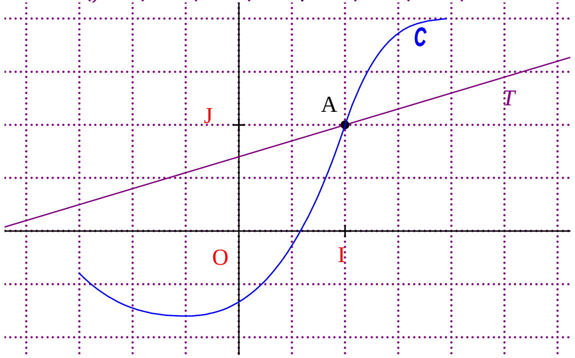


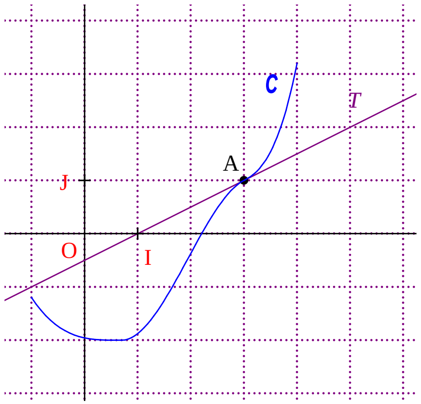
Le mot « tangente » tout court ne va pas ; on doit dire tangente en un point.

$\boxed{4}$ Dans chaque cas, dire sans justifier si la droite T semble tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.





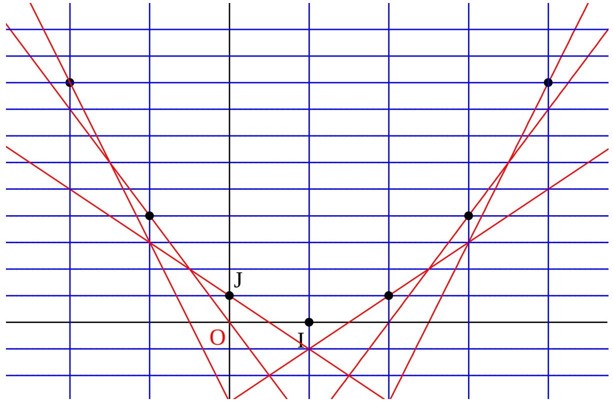




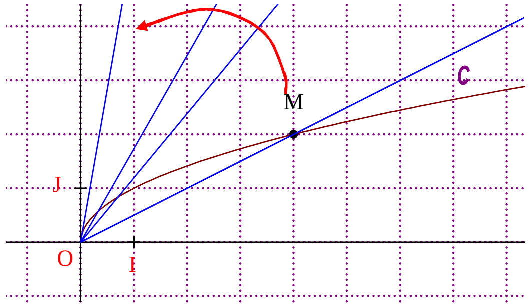
$\boxed{5}$ Reconstituer une courbe à partir des tangentes

Il y avait une courbe sur le graphique ci-dessous. Il ne reste que quelques-uns de ses points (les points noirs) et les tangentes passant pas ces points (en rouge).

Reproduire le graphique ci-dessous et tracer une ébauche de la courbe disparue. Effectuer le tracé « à la main » en essayant de faire le tracé le plus harmonieux possible.



$\boxed{6}$ Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction « racine carrée ».
Soit M un point mobile de $\mathcal{C}$.
Que peut-on dire de la position limite de la droite (OM) lorsque M se rapproche de O (sur la courbe) ?



$\boxed{7}$ Deux élèves ont un avis différent sur les tangentes à la courbe de la « fonction carré ».

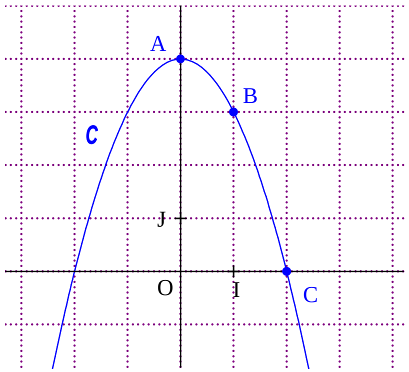
Élève 1 : « Il y a une infinité de tangentes en tout point. »

Élève 2 : « Il y a une seule tangente en tout point. »

Lequel des deux a raison ?

$\boxed{\textbf{8}}$ Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on note $\mathcal{C}$ la courbe ci-dessous.

1°) Reproduire cette courbe et tracer les droites (AB) et (AC). Lire graphiquement leurs coefficients directeurs.
Donner leurs équations réduites.
2°) Dire intuitivement quelle est la tangente en A à $\mathcal{C}$. La tracer en rouge sur le graphique précédent.



Notes de corrigé et commentaires

Remarque importante : toutes les procédures de construction dans les exercices proposés sont spécifiques à ce chapitre ; elles ne seront pas réutilisées dans des chapitres ultérieurs.

On tâchera d'utiliser le vocabulaire vu en cours : notion de **point dynamique**, notion de **corde ou de sécante**, **position limite…**

$\boxed{1}$ Tangentes à un cercle

Cet exercice a pour but de revoir la tangente à un cercle comme position limite des sécantes (autre point de vue).

1°) On trace la tangente au cercle en appliquant la définition : droite passant par le point et perpendiculaire au rayon.
Pour le tracé de la tangente, **codage** (angle droit).

2°)

Compétence mise en œuvre dans cette question :

Décrire une situation géométrique inhabituelle avec des mots (mathématiques).

Commentaires :

• « Plus le point M se rapproche du point A, plus la droite (AM) est tangente au cercle ».
Cette formulation est balayée par l'objection suivante : une droite est tangente ou non au cercle.

• « Plus le point M se rapproche du point A, plus la droite (AM) est parallèle à la tangente ».
On peut facilement reprendre l'idée de l'élève pour formuler une meilleure version de la réponse.
Plus le point M se rapproche de A, plus la droite (AM) est confondue avec la tangente.
Le terme employé « confondu » est l'occasion de revenir sur ce mot de vocabulaire mathématique.
Ce mot vient du verbe « confondre ». Nous verrons que ce terme sera employé dans la phrase réponse de cet exercice.
On emploie ce terme pour des points, des droites ou des courbes.
On dit qu'une droite est confondue avec une autre droite ou que deux droites sont confondues.
Là encore, nouvelle objection : une droite est confondue ou non avec une autre droite.

• « Plus le point M se rapproche de A, plus la droite (AM) se rapproche du cercle ».
On ne sait pas très bien quel sens donner à cette phrase.
Pour expliciter cette remarque, on pourrait faire des zooms autour du point A.

• « Plus le point M se rapproche de A, plus l'angle aigu entre la droite (AM) et la tangente se rapproche de 0 (devient petit) ».

• « Plus le point M se rapproche de A, plus les deux points d'intersection sont proches ».
C'est vrai mais sans grand intérêt.
Phrase réponse :

« Lorsque M se rapproche de A, la droite (AM) vient se confondre avec la tangente au cercle en A. »

Ou

« Au fur et à mesure que M se rapproche de A, la droite (AM) se rapproche de la tangente au cercle en A ».

Petit commentaire d'Antoine Lieubray (1ère S_1, le 3 décembre 2011)

« La partie de la courbe où se trouve le point de contact doit avoir une équation sensiblement similaire à celle de la tangente. »

$\boxed{2}$ Tangentes à une parabole

On n'écrit pas (AM_1), (AM_2), (AM_3) etc. à côté des droites sur le graphique.

On ne trace pas la tangente à la parabole dans cet exercice.
Cet exercice a pour but de faire comprendre la notion de point dynamique (ou point mobile) ainsi que la notion de droite mobile (droite qui pivote autour d'un point).

On ne trace pas la tangente dans cet exercice.

$\boxed{3}$

Le verbe « toucher » ne s'emploie pas dans la rédaction moderne.
Le verbe « toucher » est un verbe mathématique du XVIIe siècle que nous n'emploierons pas cette année.

Il en est de même du mot « dôme » qui pour le coup n'est pas un verbe mathématique.

Il y a d'autres verbes non mathématiques que les élèves aiment bien employer. Par exemple ; le verbe « croiser » que les élèves emploient pour les droites !

La droite D_3 « touche » la courbe $\mathcal{C}$ en unique point A au niveau du « dôme » de la courbe (au niveau du sommet de la « forme arrondie »). C'est n'importe quoi mais ça permet de comprendre.
La courbe vient coller la tangente en ce point (au voisinage du point uniquement).
Elle fait un peu boomerang.

Le lundi 30 novembre 2015

Ne pas utiliser les termes « toucher », « dôme » et une tangente ne peut pas paraître perpendiculaires au « rayon de la partie arrondie » d'une courbe.
Ce sont des expressions qu'on ne peut pas utiliser.

Commentaires oraux :

Toutes les droites (AM_1), (AM_2), (AM_3) etc. sont concourantes en A.

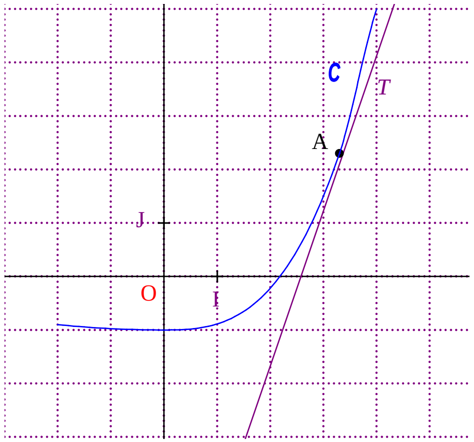
« La tangente, c'est celle dont l'allure ressemble le plus à celle de la courbe. »
« Il y a une seule tangente à une courbe en un point. »
« Une tangente peut partir n'importe comment ». (Pauline Faivre).
« Parmi les droites qui sont tracées sur la figure, la tangente est celle qui frôle la courbe (elle est la plus proche des deux côtés. »

Pas de notion de perpendiculaire (cela marcherait seulement si la courbe était un cercle).

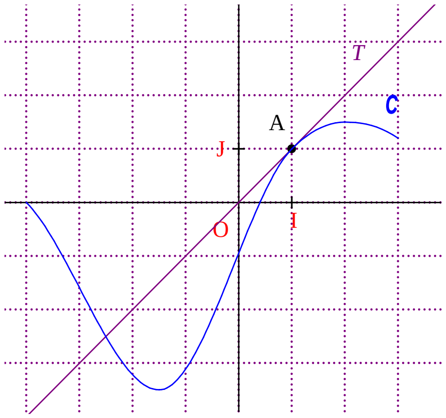
On voit dans ce 1^er^ exercice, la notion de point de contact ou de point de tangence.
On peut refaire la démarche avec la règle non graduée en faisant autour du point A.

On peut parler de la position de la tangente par rapport à la courbe.
La courbe est strictement au-dessous ou sécante en A à la tangente.

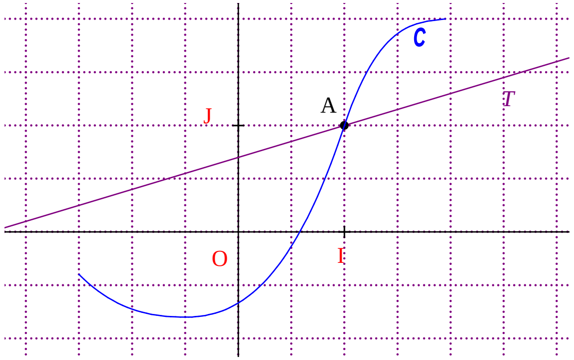
$\boxed{4}$ **Pour aller plus loin,** lorsque *T* est bien la tangente à la courbe **C**, on peut parler de la position de **C** par rapport à *T*.



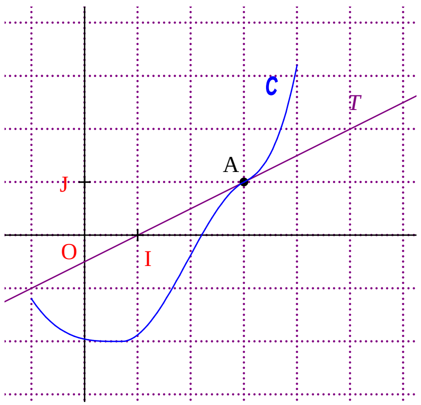
La droite *T* n'est pas tangente à **C** en A car elle ne « touche » pas la courbe en A.
On peut exclure d'emblée une droite qui ne touche pas la courbe.



La droite *T* semble tangente à **C** en A.
Le fait qu'elle recoupe la courbe en un point n'est pas un obstacle (le fait qu'une droite coupe la courbe en un seul point n'est pas un critère qui est retenu pour la tangente : nous avons vu qu'en tout point de la courbe de la « fonction carré », la droite passant par ce point et parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en un seul point et n'est pourtant pas tangente).



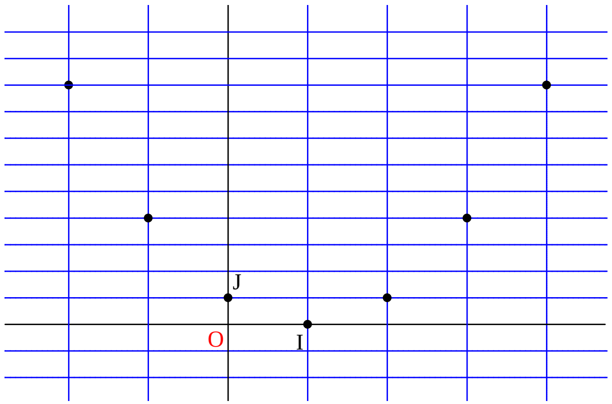
On peut immédiatement dire que la droite *T* n'est pas tangente à **C** en A car elle n'est pas du tout proche de la courbe au voisinage du point A.



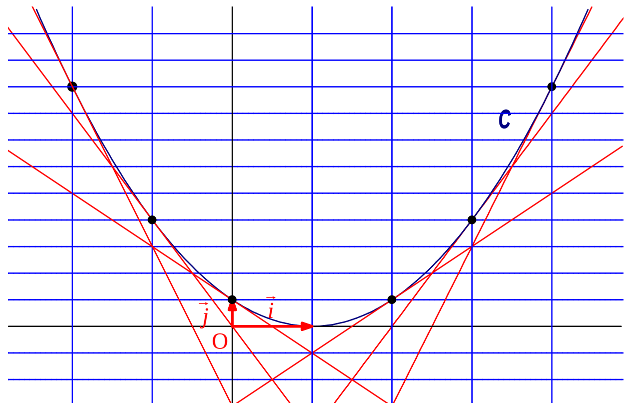
La droite T semble tangente à $\mathcal{C}$ en A.
Le fait que la courbe soit dans une position un peu particulière par rapport à cette tangente n'est absolument pas un obstacle. Pour s'en convaincre, il faut reprendre l'idée des droites qui tournent en imaginant un point M distinct de A que l'on fait se rapprocher du point A. La droite (AM) vient se confondre avec la droite T que M arrive par la gauche ou par la droite.

$\boxed{5}$ Cet exercice permet de voir que les tangentes permettent de tracer la courbe.

Tout d'abord, il convient de dire que si l'on avait donné seulement les points, on aurait pu tracer une courbe qui passe par ces points mais le tracé aurait été assez approximatif.



Le tracé est amélioré à partir du moment où l'on donne des tangentes en ces points (plus il y a de points plus le tracé est précis ; mais également, plus il y a de tangentes plus le tracé est précis). On obtient une courbe bien « lisse » ;
Il y a plein de tangentes mais une seule en chaque point.
Cela permet de voir une courbe comme « enveloppe » des tangentes.



La courbe a en fait pour équation $y=(x-1)^2$ (décalage d'une unité vers la droite de la courbe de la fonction carré).

Idées :
- prendre des morceaux de tangentes

- au point le plus bas, la courbe est tangente à l'axe des abscisses (tangente horizontale).

$\boxed{\textbf{6}}$

La position limite de (OM) est l'axe des ordonnées.
Lorsque le point M se rapproche de O, la droite (OM) se rapproche de l'axe des ordonnées.

Commentaire d'un élève :

« Je ne vois pas le but de l'exercice. »

« Si on fait évoluer M dans l'autre sens vers l'axe (Ox). »

Ça ne m'intéresse pas dans ce chapitre.

Ça ne va pas devenir parallèle.

Ce qui m'intéresse, c'est de faire s'approcher M d'un autre point.

Une élève m'a dit :

« La droite (OM) va venir se placer sur l'axe des ordonnées lorsque M sera en O. »

$\boxed{7}$ Il est important de comprendre que dans les deux phrases, le mot « tout » a le sens de « chaque ».
Ce mot sera repris dans le cours de logique sur les quantificateurs (avec les mots associés : « toujours », « n'importe lequel »…).

Chaque élève présente sa « théorie ».

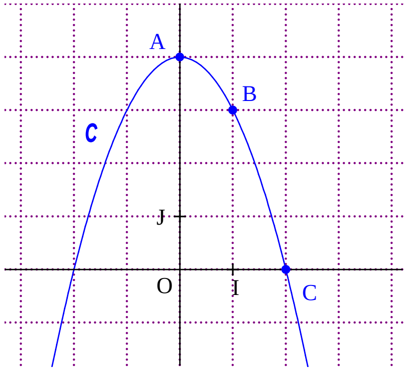
Reformulation des deux avis d'élèves :

Élève 1 : « Il y a une infinité de tangentes en chaque point. »

Élève 2 : « Il y a une seule tangente en chaque point. »

L'élève qui a raison est l'élève 2.

$\boxed{8}$ Sécantes et tangentes



1°) **Déterminons les coefficients directeurs et les équations réduites de (AB) et (AC).**

Le coefficient directeur de (AB) est **– 1**.
On peut obtenir ce résultat par lecture graphique (en avançant de 1 on descend de 1) ou par calcul (avec la formule $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$).

Le coefficient directeurs de (AC) est **– 2**.

(AB) : $y = -x + 4$

(AC) : $y = -2x + 4$

Les droites (AB) et (AC) s'appellent des « sécantes » ou des « cordes ».

2°) **Déterminons intuitivement la tangente en A à $\mathcal{C}$.**

Intuitivement, la tangente en A à $\mathcal{C}$ est la droite passant par A parallèle à l'axe des abscisses.
C'est la droite d'équation $y = 4$.

Il s'agit d'une tangente horizontale.

La tracer en rouge sur le graphique précédent.