1ère S — Exercices sur les fonctions polynômes du second degré

1 Dans chaque cas, dresser sans rédiger le tableau de variations de la fonction *f*.

1°) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$ 2°) $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 1$ 3°) $f : x \mapsto x - 2x^2$

Faire les tableaux à la règle ainsi que les flèches de variation.
Calculer dans chaque cas la valeur de l'extremum et mettre cette valeur dans le tableau de variations.

Rédiger des phrases pour exprimer ces variations selon le modèle :
« *f* est strictement croissante sur l'intervalle …. et strictement décroissante sur l'intervalle …. ».

Vérifier en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

2 Même question que dans l'exercice précédent. Il est demandé de ne pas développer les expressions des fonctions.

1°) $f : x \mapsto 3(x-1)^2 - 4$ 2°) $f : x \mapsto 3 - (x+2)^2$ 3°) $f : x \mapsto -2x^2 + 5$ 4°) $f : x \mapsto -1 + 2x^2$

3 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Faire le tableau de variations de *f*.
2°) Recopier et compléter la phrase :
« $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet $\text{S}(\ldots\,;\ldots)$ tournée vers le …. ».
À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	– 4	– 3,5	– 3	– 2,5	– 2	–1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$													

Faire un graphique sur une page complète.
Tracer le repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ en prenant un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique. Placer les points du tableau précédent (sous la forme de « points » et non de « croix »).
Mettre des pointillés et les valeurs sur les axes pour le sommet.
Tracer $\mathcal{C}$ en reliant les points précédents « à la main » en tenant compte du tableau de variations.
On soignera particulièrement l'allure de la courbe au voisinage du sommet.
Marquer le nom de la courbe en indiquant son équation.
Contrôler sur la calculatrice graphique.

4 Mêmes questions que dans l'exercice **3** avec la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

5 Mêmes questions que dans l'exercice **3** avec la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

6 Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = -x^2 + 3x - 1$ dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Le point $\text{A}(-1\,;-5)$ appartient-il à $\mathcal{C}$? Le point $\text{B}\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}\right)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?
On répondra en faisant chaque fois un calcul que l'on veillera à bien présenter.

7 Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = 2x^2 + x - 3$ dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

On rédigera selon la phrase suivante à recopier et à compléter (et apprendre par cœur !) :

« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe $(\text{O}x)$ sont les solutions de l'équation ……….. ».
Vérifier en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

8 Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = -x^2 + 3x - 1$ et *D* la droite d'équation $y = x - 4$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D*.

On rédigera ainsi :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de *D* sont les solutions de l'équation ……….. ».
Vérifier en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.
Tracer $\mathcal{C}$ et *D* sur le cahier.

9 Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 2x - 1$ et *D* la droite d'équation $y = x + 1$.
Le but de l'exercice est d'étudier par le calcul la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite *D* c'est-à-dire que l'on cherche à savoir sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}$ est au-dessus de *D*, sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}$ est au-dessous de *D* et en quel(s) point(s) $\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes.

Étudier le signe de la différence $f(x) = (x^2 + 2x - 1) - (x + 1) = x^2 + x - 2$ au moyen d'un tableau de signes puis rédiger une conclusion sur le modèle suivant :

- Si $x \in$ ...., alors $\mathcal{C}$ est …………. de *D*.
- Si $x \in$ ...., alors $\mathcal{C}$ est …………. de *D*.
- $\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes aux points d'abscisses ……. .

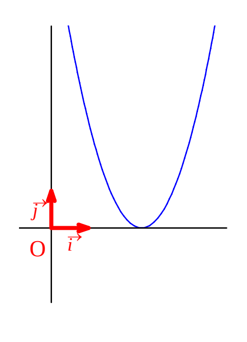
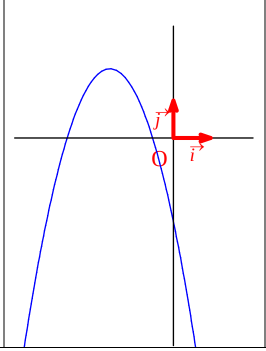
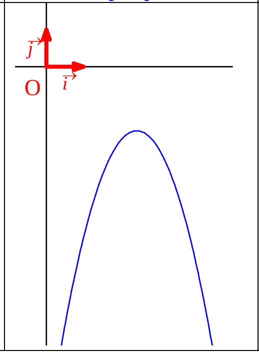
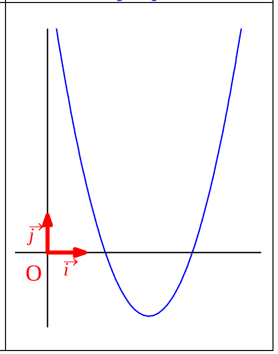
Vérifier les résultats en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

$\mathcal{C}$: $y = ax^2 + bx + c$
D : $y = a'x + b'$
Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite D sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = a'x + b'$.
On transforme cette équation en une équation de la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (équation du second degré).

Pour étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D, on calcule $f(x) = (ax^2 + bx + c) - (a'x + b')$.
On obtient une expression de la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (polynôme du second degré).

10 Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les paraboles d'équation respectives $y = -x^2 + 3x + \frac{5}{4}$ et $y = x^2 - 5x + \frac{19}{4}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Étudier par le calcul la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
On précisera en particulier les points d'intersection des deux paraboles.
Vérifier les résultats en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

11 Sur chaque graphique est représentée une fonction trinôme *f* définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels tels que $a \neq 0$.

Graphique 1	Graphique 2	Graphique 3	Graphique 4
			

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

Recopier et compléter le tableau :

	Graphique 1	**Graphique 2**	**Graphique 3**	**Graphique 4**
Signe de *a*				
Nombre de racines				
Signe de Δ				
Signe de *c*				

12 Soit *f* une fonction polynôme du second degré. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Déterminer l'expression de *f* sachant que $\mathcal{C}$ a pour sommet $\text{S}(4\,;13)$ et coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée 5.
Indication : Réfléchir à la forme la plus adaptée de *f*.

13 Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les paraboles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives $y = (x-1)^2$ et $y = -x^2 + 6x - 5$.
1°) Tracer les paraboles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur un même graphique.
On commencera par préciser :
- leurs sommets respectifs S et S′ ;
- le sens de leurs concavités respectives.
2°) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
On rédigera ainsi le début :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont les solutions de l'équation ……….. ».
Contrôler les résultats en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

14 Pour tout réel *m*, on note $\mathcal{C}_m$ la parabole d'équation $y = x^2 - 2mx + 6m$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (*m* : paramètre).
1°) En écrivant l'équation sous la forme $y = x^2 - 2m(x-3)$, démontrer que toutes les paraboles $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe Ω que l'on définira.
2°) Soit S le sommet de $\mathcal{C}_m$.
Calculer les coordonnées de S en fonction de *m* ; en déduire que S appartient à une parabole fixe Γ dont on donnera une équation.
3°) Que représente Ω pour Γ ?
Tracer Γ.

15 Soit ABCD un carré de côté *a* ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On considère les points I, J, K, L respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD], [DA] tels que $\text{AI} = \text{BJ} = \text{CK} = \text{DL} = x$.
Faire une figure en prenant la droite (AB) « horizontale », A « à gauche » de B, C et D « au-dessus » de (AB).
Coder les segments [AI], [BJ], [CK], [DL] qui sont de même longueur.
On admettra que le quadrilatère IJKL est un carré (la démonstration est cependant facile).
1°) Exprimer l'aire de IJKL en fonction de *x* (et de *a*).
2°) Pour quelle valeur de *x* l'aire de IJKL est-elle minimale ?

16 Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note Γ la parabole d'équation $y = x^2$.
Dans chaque cas, compléter la phrase en exprimant le vecteur de la translation en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

1°) $\mathcal{C}_1$: $y = x^2 - 3$

On passe de Γ à $\mathcal{C}_1$ par la translation de vecteur ………………………….. .

2°) $\mathcal{C}_2$: $y = (x-2)^2$

On passe de Γ à $\mathcal{C}_2$ par la translation de vecteur ………………………….. .

3°) $\mathcal{C}_3$: $y=(x+1)^2$

On passe de Γ à $\mathcal{C}_3$ par la translation de vecteur ………………………….. .

4°) $\mathcal{C}_4$: $y=(x-1)^2-3$

On passe de Γ à $\mathcal{C}_4$ par la translation de vecteur ………………………….. .

Vérifier en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

Corrigé

1 Variations d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme développée

On ne rédige quasiment pas dans cet exercice.

Dans chaque cas, la fonction f est une fonction polynôme du second degré donnée par une expression développée réduite (pas forcément ordonnée).
On applique la règle donnant les variations d'une fonction polynôme du second degré.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

Variations
2 cas

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de f		↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗	

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de f		↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘	

Les flèches des tableaux de variations doivent être faites à la règle.

1°) $\boldsymbol{f : x \mapsto x^2-2x+3}$

La fonction f est une fonction polynôme du second degré. On applique la propriété des variations d'une fonction polynôme du second degré.

Le coefficient du terme de degré 2 est 1 qui est strictement positif.

On calcule la valeur charnière : $-\dfrac{-2}{2\times 1}=1$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		↘	2	↗	

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

On inclut 1 dans les deux intervalles (ce n'est que quand on a une V.I.* qu'on ne l'inclut pas).
C'est « crochets fermés » dans les deux intervalles.

La notion de « croissante en 1 » n'a pas de sens.
On dit que la fonction est croissante **sur** un intervalle ou décroissante **sur** un intervalle.

On peut préciser « strictement croissante », « strictement décroissante sur ».

$2=f(1)$

2 est le minimum global de f sur $\mathbb{R}$; il est obtenu pour $x=1$ (ou il est atteint **en** $x=1$).

* V.I. : « valeur interdite » (par exemple, s'il s'agit de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, il ne faudrait pas inclure 0 dans les intervalles de monotonie).

2°) $\boldsymbol{f : x \mapsto -x^2+4x-1}$

La fonction f est une fonction polynôme du second degré. On applique la propriété des variations d'une fonction polynôme du second degré.

Le coefficient du terme de degré 2 est – 1 qui est strictement négatif.

On calcule la valeur charnière : $-\dfrac{4}{2\times(-1)}=2$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	3	$\searrow$	

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

3°) $\boldsymbol{f : x \mapsto x-2x^2}$

La fonction f est une fonction polynôme du second degré. On applique la propriété des variations d'une fonction polynôme du second degré.

Le coefficient du terme de degré 2 est – 2 qui est strictement négatif.
On calcule la valeur charnière : $-\dfrac{1}{2\times(-2)}=\dfrac{1}{4}$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.

$\boxed{2}$ Variations d'une fonction polynôme donnée sous forme canonique

Dans chaque cas, la fonction f est une fonction polynôme du second degré dont l'expression est donnée sous forme canonique (la variable apparaît à un seul endroit).

Ne pas développer les expressions des fonctions (on pourrait évidemment le faire et appliquer la règle appliquée dans l'exercice $\boxed{1}$). On va appliquer la propriété bis du cours (variations d'une fonction polynôme du second degré donnée par une expression sous forme canonique). Il n'y a pas de calcul à faire.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta \qquad (a\neq 0)$

Variations
2 cas

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Remarques pour les questions 3°) et 4°) : L'expression de la fonction est bien mise sous forme canonique. Il serait possible dans ce cas d'appliquer la 1ère propriété mais il vaut mieux voir ces expressions comme des formes canoniques (ce n'est pas toujours évident pour les élèves de reconnaître une forme canonique pour un polynôme incomplet en x).

1°) $\boldsymbol{f : x \mapsto 3(x-1)^2-4}$ (F.C. avec $a=3$, $\alpha=1$, $\beta=-4$)

$a>0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;1\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

2°) $\boldsymbol{f : x \mapsto 3-(x+2)^2}$ (F.C. avec $a=-1$, $\alpha=-2$, $\beta=3$)

$a<0$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	3	$\searrow$	

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-2\,;+\infty\right[$.

3°) $\boldsymbol{f : x \mapsto -2x^2+5}$

$a<0$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=-2(x-0)^2+5$ (F.C. avec $a=-2$, $\alpha=0$, $\beta=5$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	5	$\searrow$	

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

4°) $\boldsymbol{f : x \mapsto -1+2x^2}$

$a>0$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=2(x-0)^2-1$ (F.C. avec $a=2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

$\boxed{3}$ Tracé d'une parabole

$\boldsymbol{f : x \mapsto x^2+2x-4}$

1°) **Tableau de variations de f :**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	-5	$\nearrow$	

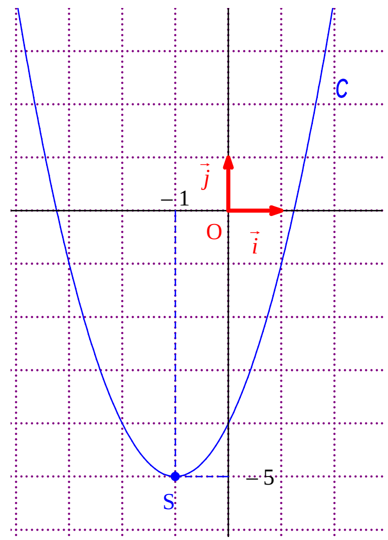
$f(-1)=5$

2°) **Tracé de $\mathcal{C}$**

f est une fonction polynôme du second degré donc sa représentation graphique $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet $S(-1\,;5)$ tournée vers le « haut ».

Pour compléter le tableau de valeurs, on utilise la calculatrice (table).

x	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	4	$1{,}25$	-1	$-2{,}75$	-4	$-4{,}75$	-5	$-4{,}75$	-4	$-2{,}75$	-1	$1{,}25$	4



On doit absolument respecter l'unité : 1 cm pour unité sur chaque axe (le repère est orthonormé).

Comme on a beaucoup de points, le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ sera assez précis.

On met le nom de la courbe : $\mathcal{C}$.

On vérifie le tracé de la courbe sur calculatrice ou sur ordinateur.

On peut écrire $\mathcal{C}$: $y = x^2 + 2x - 4$ (ce qui se lit : « $\mathcal{C}$ a pour équation $y = x^2 + 2x - 4$ »).

4 Tracé d'une parabole

$f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$

1°) **Tableau de variations de *f* :**

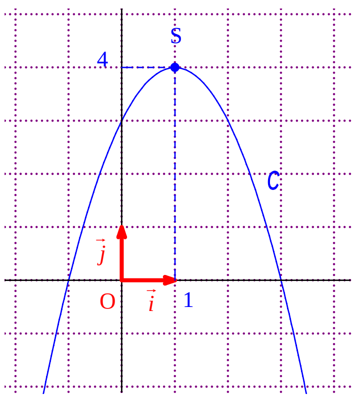
x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		↗	4	↘	

$f(1) = 4$

2°) **Tracé de $\mathcal{C}$**

$\mathcal{C}$ est une parabole de sommet $\text{S}(1\,;4)$ tournée vers le « bas ».

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	-5	$-2{,}25$	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0	$-2{,}25$	-5



5 Tracé d'une parabole

$f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

1°) **Tableau de variations de *f* :**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		↗	$\dfrac{3}{2}$	↘	

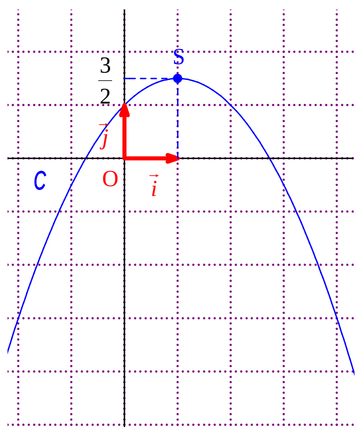
$f(1) = \dfrac{3}{2}$

2°) **Tracé de $\mathcal{C}$**

$\mathcal{C}$ est une parabole de sommet $\text{S}\left(1\,;\dfrac{3}{2}\right)$, tournée vers le « bas ».

On sait que la droite d'éuqtiona x=1 est axe de symétrie.
On place deux poits avant S et leurs symétriques par par rapport à D.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	-3	$-1{,}625$	$-0{,}5$	0,375	1	1,375	1,5	1,375	1	0,375	$-0{,}5$	$-1{,}625$	-3



$\boxed{6}$ Appartenance d'un point à une parabole :

$A \in \mathcal{C}$; $B \notin \mathcal{C}$

Présentation des calculs :

$-x_A^2+3x_A-1=...=-5$

Solution détaillée :

$\mathcal{C}$: $y=-x^2+3x-1$

Le point $A(-1;-5)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?

$$\begin{aligned}-x_A^2+3x_A-1&=-(-1)^2+3\times(-1)-1\\&=-1-3-1\\&=-5\end{aligned}$$

Donc $y_A=-x_A^2+3x_A-1$.

Par suite, $A \in \mathcal{C}$.

Le point $B\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?

$$\begin{aligned}-x_B^2+3x_B-1&=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}-1\\&=-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}-\frac{4}{4}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Donc $y_B \neq -x_B^2+3x_B-1$

Par suite, $B \notin \mathcal{C}$.

Autre méthode :

On peut aussi introduire la fonction *f* définie par $f(x)=-x^2+3x-1$. La 1[ère] méthode est préférable car il n'y a pas nécessité d'introduire une fonction.

$A(-1;-5)$

$$\begin{aligned}f(-1)&=-(-1)^2+3\times(-1)-1\\&=-5\end{aligned}$$

Donc $A \in \mathcal{C}$

$B\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right)&=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}-1\\&=-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}-\frac{4}{4}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Donc $B \notin \mathcal{C}$.

$\boxed{7}$ Intersection d'une parabole et de l'axe des abscisses

Solution détaillée :

$\mathcal{C}$: $y=2x^2+x-3$

Déterminons les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (Ox) sont les solutions de l'équation

$2x^2+x-3=0 \quad (1)$.

C'est une équation du second degré.

1 est une racine évidente de l'équation. L'autre racine est $-\frac{3}{2}$ (obtenue par produit).

On peut aussi utiliser le discriminant de l'équation $\Delta=1+24=25$ puis utiliser les formules donnant les racines d'une équation du second degré.

On en déduite que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (Ox) sont 1 et $-\frac{3}{2}$.

Remarque :

On peut écrire une égalité de la forme $\mathcal{C} \cap (Ox)=\{I;J\}$ avec $I(\ldots;\ldots)$ et $J(\ldots;\ldots)$.

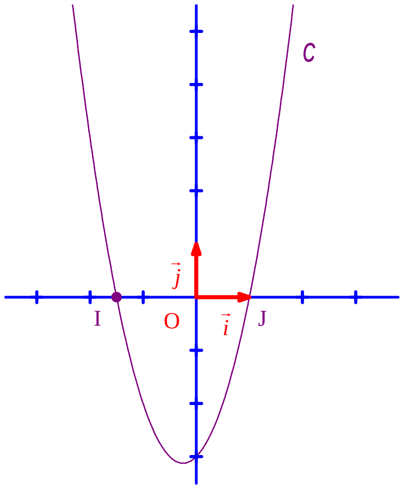
Avec les résultats trouvés, on a $\mathcal{C} \cap (Ox)=\{I;J\}$ avec $I\left(-\frac{3}{2};0\right)$ et $J(1;0)$.

Il s'agit d'une égalité d'ensembles qui se lit : « L'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ est de l'axe (Ox) est l'ensemble constitué des points I et J ».

Comme l'énoncé ne précise pas si $x_I > x_J$ ou $x_I < x_J$, on peut tout aussi bien donner $I(1;0)$ et $J\left(-\frac{3}{2};0\right)$.

On vérifie le résultat graphiquement en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

Faire le graphique.



$\boxed{8}$ Intersection d'une droite et d'une parabole

Solution détaillée :

$\mathcal{C}$: $y=-x^2+3x-1$

D : $y=x-4$

Déterminons les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D*.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les solutions de l'équation $-x^2+3x-1=x-4$ (1).

On se garde d'écrire de $\mathcal{C}$ = *D*.

(1) est équivalente à $-x^2+2x+3=0$.

Les racines de cette équation sont – 1 (racine évidente) et 3 (obtenue par produit).

Complément :

On en conclut que $\mathcal{C}\cap(\mathrm{O}x)=\{\mathrm{I}\,;\mathrm{J}\}$ avec $\mathrm{I}(-1\,;-5)$ et $\mathrm{J}(3\,;-1)$.

On a calculé les ordonnées des points I et J à l'aide de l'équation de $\mathcal{C}$ ou de l'équation réduite de D :

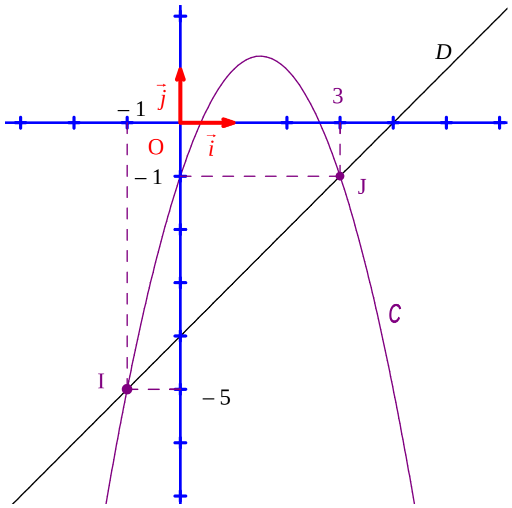
$$\begin{aligned} y_{\mathrm{I}} &= x_{\mathrm{I}}-4 \\ &= -1-4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{I}} &= -{x_{\mathrm{I}}}^2+3x_{\mathrm{I}}-1 \\ &= -(-1)^2+3\times(-1)-1 \\ &= -5 \end{aligned}$$

On vérifie en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

Faire le graphique.



$\boxed{9}$ Étude de la position relative d'une parabole et d'une droite

Solution détaillée :

$\mathcal{C}$: $y=x^2+2x-1$
D : $y=x+1$

Étudions la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite *D*.

On calcule $f(x)=(x^2+2x-1)-(x+1)$
$=x^2+x-2$

$f(x)$ est un polynôme du second degré [important à dire].

1 est une racine évidente du polynôme.
L'autre racine est donc – 2.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	–	0	+	

- Si $x\in\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$, alors $f(x)>0$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D sur $\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$.
- Si $x\in\left]-2\,;1\right[$, alors $f(x)<0$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D sur $x\in\left]-2\,;1\right[$.
- $\mathcal{C}$ et D sont sécantes aux points d'abscisses – 2 et 1.

On peut aussi faire toute l'étude dans un tableau :

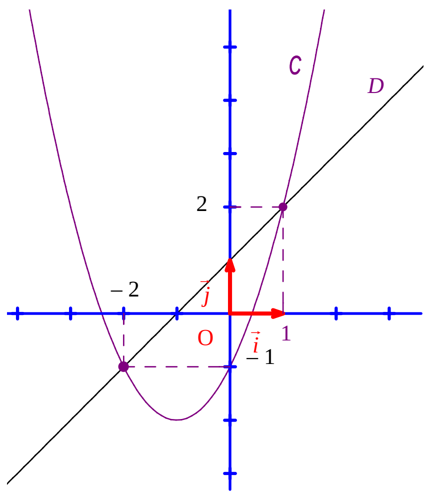
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position de $\mathcal{C}$ et D		$\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D	$\mathcal{C}$ et D sont sécantes au point d'abscisse -2	$\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D	$\mathcal{C}$ et D sont sécantes au point d'abscisse 1	$\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D	

Question : Pourquoi ne calcule-t-on pas les ordonnées des points d'intersection ?

Réponse : On peut effectivement calculer les ordonnées des points d'intersection mais ce n'est pas forcément utile lorsque l'on demande uniquement la position relative.

Ne pas écrire $\mathcal{C} > D$, ni $\mathcal{C} < D$.
Ne pas dire que $\mathcal{C}$ et D sont confondues aux points d'abscisses -2 et 1.

On vérifie les résultats graphiquement sur calculatrice ou sur ordinateur.
Faire le graphique.



10 **Étude de la position relative de deux paraboles**

$\mathcal{C}$: $y = -x^2 + 3x + \frac{5}{4}$

$\mathcal{C}'$: $y = x^2 - 5x + \frac{19}{4}$

Étudions la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Point-méthode :

Pour étudier la positon relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on doit comparer $-x^2 + 3x + \frac{5}{4}$ et $x^2 - 5x + \frac{19}{4}$.

On va utiliser la méthode de la différence.
On calcule la « différence des deux équations » ou plutôt la différence des expressions des seconds membres des deux équations.

On calcule $f(x) = \left(-x^2 + 3x + \frac{5}{4}\right) - \left(x^2 - 5x + \frac{19}{4}\right)$

$= -2x^2 + 8x - \frac{14}{4}$

$= -2x^2 + 8x - \frac{7}{2}$

On n'écrit surtout pas $\mathcal{C} - \mathcal{C}' = \left(-x^2 + 3x + \frac{5}{4}\right) - \left(x^2 - 5x + \frac{19}{4}\right)$.

$f(x)$ est un polynôme du second degré.

On calcule le discriminant réduit.

$\Delta' = 4^2 - (-2) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = 16 - 7 = 9$

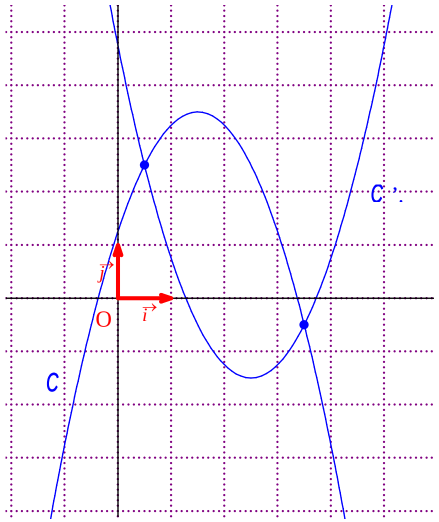
Comme $\Delta' > 0$, le polynôme $f(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-4+3}{-2} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-4-3}{-2} = \frac{7}{2}$.

On applique directement la règle du signe d'un trinôme du second degré (inutile de factoriser).

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Si $x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2} ; +\infty\right[$, alors $f(x) < 0$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de $\mathcal{C}'$ sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2} ; +\infty\right[$.
- Si $x \in \left]\frac{1}{2} ; \frac{7}{2}\right[$, alors $f(x) > 0$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}'$ sur $\left]\frac{1}{2} ; \frac{7}{2}\right[$.
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécantes aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{2}$.

On vérifie les résultats graphiquement sur calculatrice ou sur ordinateur.



Remarque :

On ne met jamais « y_1 », « y_2 » ou « y' » dans une équation de courbe.
On laissera y dans tous les cas contrairement aux calculatrices qui mettent Y_1 et Y_2.

Retenir que pour une équation de courbe, on doit toujours laisser y : on n'a rien le droit de rajouter, ni $y_{\mathcal{C}}$, ni y', ni y_1, ni y_2 …

11 **Tableau à compléter :**

	Graphique 1	Graphique 2	Graphique 3	Graphique 4
Signe de *a*	+	–	–	+
Nombre de racines	1	2	0	2
Signe de Δ	0	+	–	+
Signe de *c*	+	–	–	+

Quelques explications :

• **Pour le signe de *a*,** on regarde la concavité de la parabole : si la concavité est tournée vers les « y positifs », alors $a > 0$; si la concavité est tournée vers les « y négatifs », alors $a < 0$.
• **Pour le nombre de racines du polynôme,** on regarde le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses :
- s'il y a deux points d'intersection, alors le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$;
- s'il y a un point d'intersection, alors le polynôme admet une racine dans $\mathbb{R}$;
- s'il n'y a aucun point d'intersection, alors le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.
• **Le signe de Δ** se déduit du nombre de racines.
Pour deux racines distinctes, $\Delta > 0$.
Pour une racine double, $\Delta = 0$.
Pour 0 racine, $\Delta < 0$.
• **Pour le signe de *c*,** il faut se souvenir que c est l'ordonnée du point d'intersection de la parabole est de l'axe des ordonnées.

12

On peut commencer par faire un graphique en plaçant les points S et A.

On utilise la forme canonique de *f*.

La connaissance des coordonnées du sommet de $\mathcal{C}$ permet de dire que $f(x) = a(x-4)^2 + 13$ où a est un réel non nul.
On trouve ensuite a en exprimant que $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0\,;5)$ c'est-à-dire que $f(0) = 5 \quad (1)$.

$$f(0) = a \times (0-4)^2 + 13 = 16a + 13$$

Donc (1) est successivement équivalente à :

$$16a + 13 = 5$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

On en déduit que $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 13$.
Il n'est pas forcément utile de développer.

13 **Intersection de deux paraboles**

Quelques indications :

1°) Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des paraboles.
$\mathcal{C}$ est tournée vers le haut.
$\mathcal{C}'$ est tournée vers le bas.

Pour le tracé, on peut utiliser l'axe de symétrie de chacune des courbes.

Présentation des calculs des coordonnées du sommet S : $S \left| \begin{array}{l} x_S = 1 \\ y_S = (x_S - 1)^2 = 0 \end{array} \right.$.

Quand on effectue le tracé, on constate que le sommet de chaque parabole est situé sur l'autre ce que l'on retrouvera dans la question suivante par le calcul.

2°) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
2 méthodes : discriminant réduit ou racine évidente.
Conclusion : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A\,;B\}$ avec $A(1\,;0)$ et $B(3\,;4)$.
On peut utiliser les abscisses des points d'intersection pour calculer leurs ordonnées.

En fait, $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{S\,;S'\}$.

Solution détaillée :

$\mathcal{C} : y = (x-1)^2$
On reconnaît une équation de la forme $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

On évite de développer.

On peut donc dire que $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet S $\left|\begin{array}{l} x_S = \alpha = 1 \\ y_S = \beta = 0 \end{array}\right.$ tournée vers le haut (car $a > 0$).

Pour effectuer le tracé, on réalise un petit tableau de valeurs.

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

Comme le repère est orthonormé, la parabole $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie.

$\mathcal{C}'$: $y = -x^2 + 6x - 5$

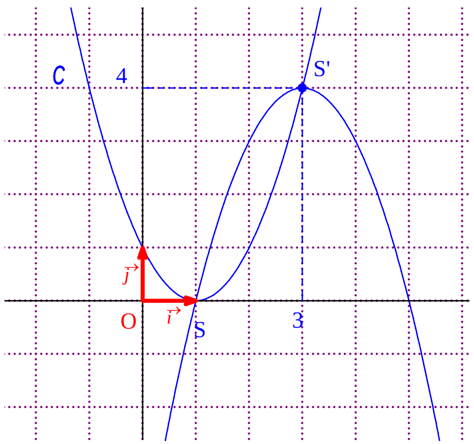
On reconnaît une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = -5$.

On peut donc dire que $\mathcal{C}'$ est une parabole de sommet S' $\left|\begin{array}{l} x_{S'} = -\dfrac{b}{2a} = 3 \\ y_{S'} = -3^2 + 6 \times 3 - 5 = 4 \end{array}\right.$ tournée vers le bas (car $a < 0$).

Pour effectuer le tracé, on réalise un petit tableau de valeurs.

x	1	2	3	4	5
y	0	3	4	3	0

Comme le repère est orthonormé (donc en particulier, orthogonal), la parabole $\mathcal{C}'$ admet la droite d'équation $x = 3$ pour axe de symétrie.



2°) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Les abscisses des points les solutions de l'équation $(x-1)^2 = -x^2 + 6x - 5$ (1).

(1) est successivement équivalente aux équations suivantes :

$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 6x - 5$

$2x^2 - 8x + 6 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ (1′)

1 est racine évidente de (1′).

Les racines de (1′) sont 1 (racine évidente) et 3 (obtenu par produit).

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont donc 1 et 3.

On calcule les ordonnées en utilisant l'équation de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$.

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$ sont $(1;0)$ et $(3;4)$.

On peut écrire une égalité d'ensemble de la forme $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A;B\}$ avec $A(\ldots;\ldots)$ et $B(\ldots;\ldots)$.

$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A;B\}$ avec $A(1;0)$ et $B(3;4)$.

En fait, on peut observer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{S;S'\}$.

$\boxed{14}$ Étude d'une famille de paraboles dépendant d'un paramètre

Cet exercice est intéressant à traiter à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Quelques indications :

1°) Présentation des calculs : ${x_\Omega}^2 - 2mx_\Omega + 6m = ... = 9 = y_\Omega$

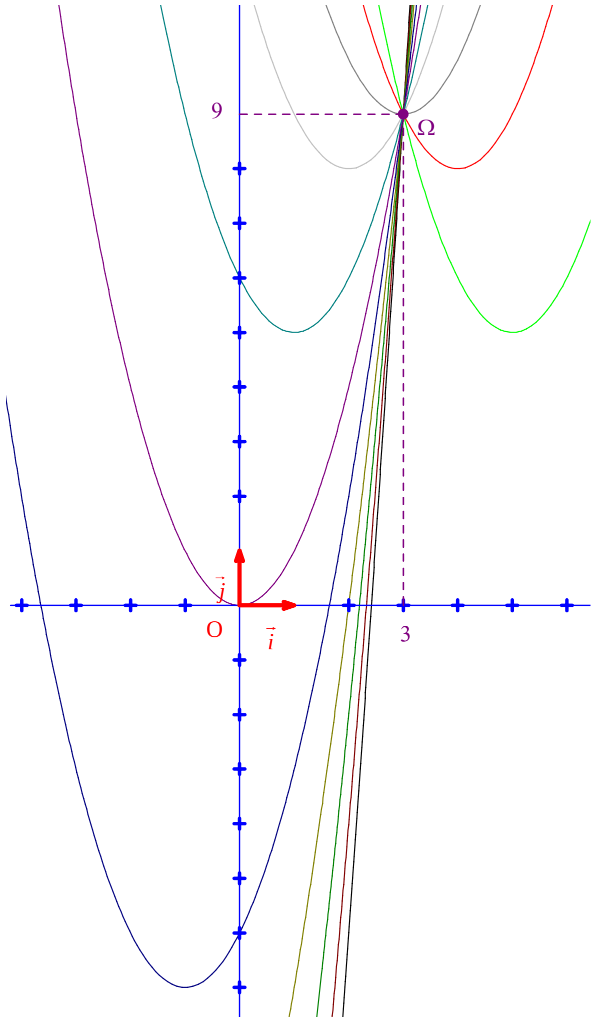
2°) $\Gamma : y = -x^2 + 6x$; Ω est le sommet de Γ.

Solution détaillée :

$\mathcal{C}_m$: $y = x^2 - 2mx + 6m$

m est un **paramètre**.

On étudie une famille de paraboles dépendant d'un paramètre.



1°) **Vérifions que toutes les paraboles $\mathcal{C}_m$ passent par le point $\Omega(3\ ;\ 9)$.**

On a : $x_\Omega{}^2 - 2mx_\Omega + 6m = 9 - 6m + 6m = 9 = y_\Omega$.
Donc toutes les paraboles $\mathcal{C}_m$ passent par le point $\Omega(3\ ;\ 9)$.

> On ne dit pas que les paraboles sont concourantes au point Ω.
> Le mot « concourantes » ne s'emploie que pour des droites.

2°) S : sommet de $\mathcal{C}_m$

• Calculons les coordonnées de S en fonction de *m*.

S est le sommet de $\mathcal{C}_m$ donc S $\left|\begin{array}{l} x_S = -\dfrac{-2m}{2} = m \\ y_S = x_S{}^2 - 2mx_S + 6m = m^2 - 2m^2 + 6m = -m^2 + 6m \end{array}\right.$.

• Déduisons-en que S appartient à une parabole fixe Γ.

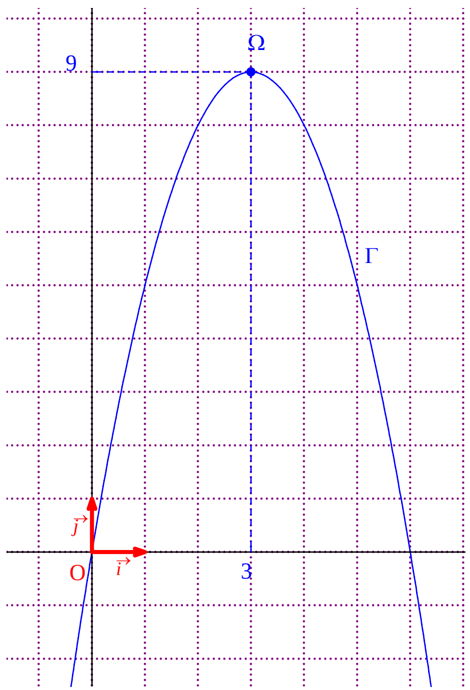
Comme $x_S = m$, on a : $y_S = -x_S{}^2 + 6x_S$ donc on en déduit que S appartient à la parabole Γ d'équation $y = -x^2 + 6x$.

3°) **Traçons Γ.**

Γ a pour sommet U $\left|\begin{array}{l} x_U = -\dfrac{6}{2\times(-1)} = 3 \\ y_U = 9 \end{array}\right.$ donc $U = \Omega$.

Ω est le sommet de Γ.

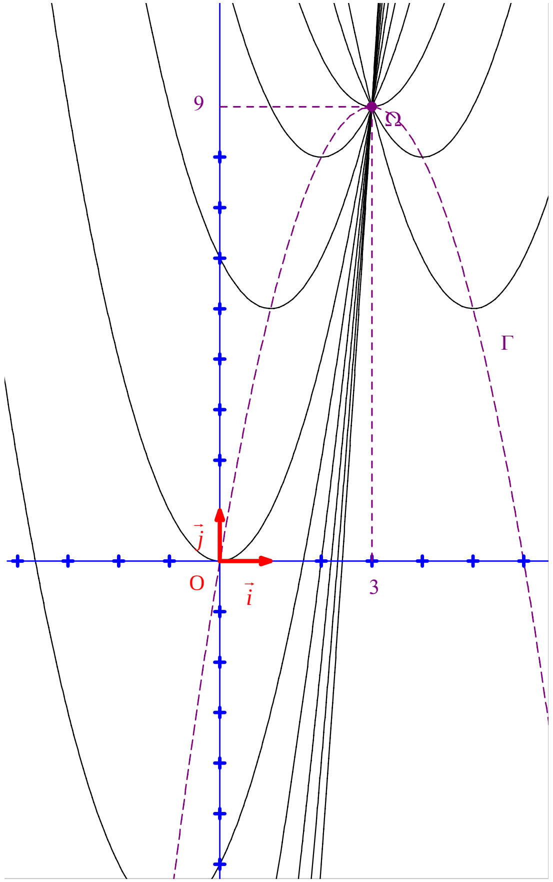
x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	5	8	9	8	5	0



On pourrait aussi dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 6x$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de f	↗	9	↘

Il est particulièrement intéressant d'utiliser un logiciel de tracé de courbes dynamique sur ordinateur pour faire apparaître la famille de paraboles.



Pour aller plus loin :

On pourrait demander l'ensemble des points S lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

Pour répondre, on dira que $x_S = m$ donc lorsque m décrit $\mathbb{R}$, l'abscisse de S décrit également $\mathbb{R}$ tout entier et part suite, S décrit la parabole Γ tout entière.

L'ensemble des points S lorsque m décrit $\mathbb{R}$ est donc la parabole Γ.

$\boxed{15}$ Il s'agit d'un **problème d'optimisation**.

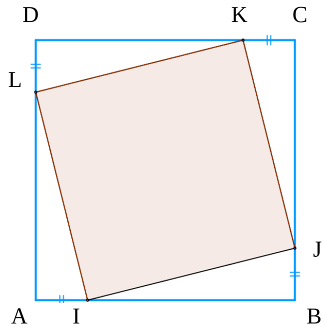
Hypothèses :

ABCD carré de côté a ($a > 0$)

$I \in [AB]$, $J \in [BC]$, $K \in [CD]$, $L \in [DA]$ tels que $AI = BJ = CK = DL = x$

On admet que IJKL est un carré (attention, ce n'est pas une hypothèse ; cela résulte d'une démonstration que l'on ne fait pas ici car l'énoncé demande d'admettre ce résultat).

Faire une figure.



On peut réaliser la figure à l'aide de Geogebra (figure dynamique) qui permet d'avoir une idée du minimum. Pour cela, les points I, J, K, L doivent être mobiles.

1°) **Exprimons l'aire de IJKL en fonction de x (et de a).**

Pour calculer l'aire du carré IJKL, il y a deux méthodes :

1ère méthode :

On peut dire que l'aire du carré IJKL est égale à l'aire du carré ABCD moins l'aire des triangles IBJ, JCK, KDL, LAI. Ces quatre triangles sont isométriques.

On obtient : $\mathcal{A}_{IJKL} = (\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{BIJ} + \mathcal{A}_{CJK} + \mathcal{A}_{DKL} + \mathcal{A}_{DAIL}) = a^2 - 4\dfrac{x(a-x)}{2} = 2x^2 - 2ax + a^2$.

2e méthode :

On calcule IJ^2 (inutile de calculer IJ car on aura besoin du carré de IJ).
Le triangle IBJ est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$IJ^2 = IB^2 + BJ^2$ d'où $IJ^2 = (a-x)^2 + x^2$ soit $IJ^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$.

On obtient $\mathcal{A}_{IJKL} = IJ^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$.

2°) **Déterminons pour quelle valeur de x l'aire de IJKL est minimale.**

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 2ax + a^2$.
Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré.
Ses coefficients sont : $\alpha = 2$; $\beta = -2a$; $\gamma = a^2$.

$$-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{a}{2}$	$+\infty$
Variations de f	↘	$f\left(\frac{a}{2}\right)$	↗

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a \times \frac{a}{2} + a^2 = 2 \times \frac{a^2}{4} \cancel{-a^2} + \cancel{a^2} = \frac{a^2}{2}$$

D'après le tableau de variation, le minimum de f sur l'intervalle $[0 ; a]$ est égal à $\frac{a^2}{2}$ atteint en $x = \frac{a}{2}$.

L'aire du carré IJKL est minimale pour $x = \frac{a}{2}$.
Dans ce cas, I, J, K, L sont les milieux des côtés.

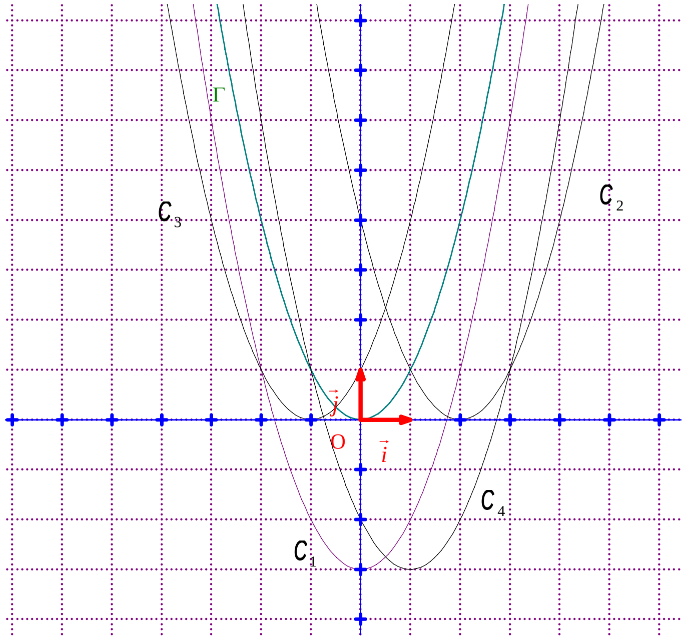
N.B. :
On aurait aussi pu appliquer directement le résultat sur les extremums d'une fonction polynôme du second degré sans faire le tableau de variation.

Le minimum obtenu est logique pour raison de symétrie.

$\boxed{\textbf{16}}$ On utilise la règle du cours avec $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.
Il faut pour cela que la fonction polynôme soit mise sous forme canonique ce qui est le cas.

Γ : $y = x^2$

On vérifie tous les résultats en traçant les paraboles sur l'écran de la calculatrice ou sur ordinateur.



1°) $\mathcal{C}_1$: $y = x^2 - 3$
On passe de Γ à $\mathcal{C}_1$ par la translation de vecteur $-3\vec{j}$.

Faire le graphique.

2°) $\mathcal{C}_2$: $y = (x-2)^2$
On passe de Γ à $\mathcal{C}_2$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$.

Faire le graphique.

3°) $\mathcal{C}_3$: $y = (x+1)^2$
On passe de Γ à $\mathcal{C}_3$ par la translation de vecteur $-\vec{i}$.

4°) $\mathcal{C}_4$: $y = (x-1)^2 - 3$
On passe de Γ à $\mathcal{C}_4$ par la translation de vecteur $\vec{i} - 3\vec{j}$.

Classification des exercices par compétences

Compétences	Exercices
Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré	$\boxed{1}$ et $\boxed{2}$
Tracer la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré	$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ et $\boxed{5}$
Déterminer si un point appartient ou non à une parabole	$\boxed{6}$
Déterminer les abscisses des points d'intersection d'une parabole avec l'axe des abscisses.	$\boxed{7}$
Déterminer les coordonnées des points d'intersection d'une parabole et d'une droite.	$\boxed{8}$
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de deux paraboles.	$\boxed{13}$
Déterminer la position relative de deux paraboles	$\boxed{9}$ et $\boxed{10}$
Savoir relier des propriétés géométriques d'une parabole à celles de la fonction trinôme qu'elle représente	$\boxed{12}$
Résoudre un problème d'optimisation à l'aide d'une fonction polynôme du second degré	$\boxed{15}$
Savoir reconnaître la translation permettant de passer de la parabole représentant la fonction « carré » à une autre parabole	$\boxed{16}$.

L'exercice $\boxed{14}$ relève de plusieurs compétences.