1ère S

Fonctions polynômes du second degré (variations, extremums, représentations graphiques)

Objectifs du chapitre :

Étudier les fonctions polynômes du second degré selon 3 axes :
- variations ;
- extremums ;
- représentation graphique.

I. Variations d'une fonction polynôme du second degré

1°) Étude

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{(forme canonique)}$$

Déterminons les variations de f sur $\mathbb{R}$.

On pose $I_1 = \left[-\frac{b}{2a} ; +\infty\right[$ et $I_2 = \left]-\infty ; -\frac{b}{2a}\right]$. On a : $\mathbb{R} = I_1 \cup I_2$.

On travaille avec la forme canonique.

• 1er cas : $\boxed{a > 0}$

- Sens de variation sur I_1

On prend deux réels quelconques dans I_1 tels que $u < v$.

On a donc : $-\frac{b}{2a} \leqslant u < v$.

Donc $0 \leqslant u + \frac{b}{2a} < v + \frac{b}{2a}$.

Par suite, $\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(v + \frac{b}{2a}\right)^2$ d'où $a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 < a\left(v + \frac{b}{2a}\right)^2$ (car $a > 0$)

Donc $a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} < a\left(v + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

On en conclut $f(u) < f(v)$.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I_1.

- Sens de variation sur I_2

On prend deux réels quelconques dans I_2 tels que $u < v$.

On a donc : $u < v \leqslant -\frac{b}{2a}$.

Donc $u + \frac{b}{2a} < v + \frac{b}{2a} \leqslant 0$.

Par suite, $\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(v + \frac{b}{2a}\right)^2$ d'où $a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 > a\left(v + \frac{b}{2a}\right)^2$ (car $a > 0$)

Donc $a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} > a\left(v + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

On en conclut $f(u) > f(v)$.

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I_2.

• 2e cas : $\boxed{a < 0}$

Même démarche.

f est strictement décroissante sur I_1 et strictement croissante sur I_2.

2°) Propriété (variations d'une fonction polynôme du second degré)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Variations
2 cas

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

On retiendra par cœur la valeur de la « valeur charnière » $-\frac{b}{2a}$ dans le tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré.

On pourra retenir éventuellement que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

3°) Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x^2 + 4x + 3$

Dresser le tableau de variation de *f*.

Recensement des coefficients :

$a = -1$; $b = 4$; $c = 3$

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{-2} = 2$

On a : $a < 0$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	7	$\searrow$

$f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 3 = 7$

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$.

La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

4°) Propriété bis (variations d'une fonction polynôme du second degré)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad (a \neq 0)$

Variations
2 cas

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	β	$\nearrow$

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	β	$\searrow$

Rappel :

On a l'identité : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ ou encore $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\left|\begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = f(\alpha) \end{array}\right.$.

II. Extremums

1°) Propriété (extremums d'une fonction polynôme du second degré)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

- Si $a > 0$, alors *f* admet un **minimum global** (ou minimum absolu) sur $\mathbb{R}$, obtenu pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $a < 0$, alors *f* admet un **maximum global** (ou maximum absolu) sur $\mathbb{R}$, obtenu pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Dans les deux cas, cet extremum est égal à $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2°) Remarque

- On peut utiliser directement ce résultat en exercice.
- Application aux **problèmes d'optimisation** (on cherche à optimiser une certaine grandeur, par exemple une longueur, un périmètre, une aire, un volume ; pour cela on définit une fonction dont étudie les extremums).

OPTIMISATION = MAXIMISATION / MINIMISATION

(« optimal » ça veut dire « meilleur », on pense plus au meilleur qu'au pire !).

3°) Propriété bis (extremums d'une fonction polynôme du second degré)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad (a \neq 0)$

- Si $a > 0$, alors *f* admet un **minimum global** (ou **minimum absolu**) sur $\mathbb{R}$, obtenu pour $x = \alpha$.
- Si $a < 0$, alors *f* admet un **maximum global** (ou **maximum absolu**) sur $\mathbb{R}$, obtenu pour $x = \alpha$.

Dans les deux cas, cet extremum est égal à β.

III. Obtention de courbes à partir de celle de la fonction « carré »

Dans les paragraphes III et le IV, on se place dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La courbe de la fonction « carré » apparaît comme la courbe d'une fonction « de base » permettant de tracer facilement les courbes de fonctions associées.

1°) Exemples

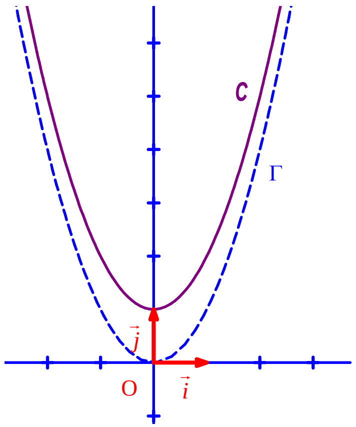
Rappel :

La courbe Γ de la fonction « carré » a pour équation $y = x^2$.
C'est une parabole de sommet O.

Dans les exemples, on observe chaque courbe sur calculatrice ou sur ordinateur.
Chaque proposition est admise sans démonstration.

• Exemple 1 :

$\mathcal{C}$: $y = x^2 + 1$



On passe de Γ à $\mathcal{C}$:

- en ajoutant 1 aux ordonnées de tous les points de Γ ;

- par la translation de vecteur $\vec{j}$.

On ne dit pas que les courbes sont « parallèles ».

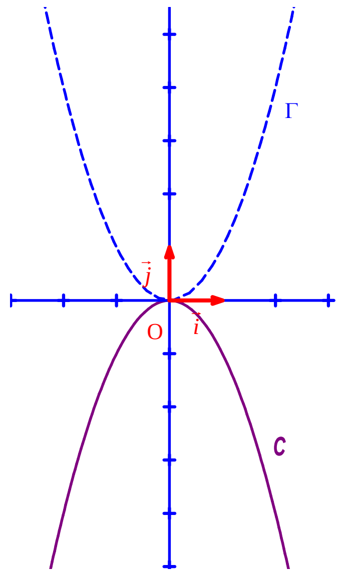
• Exemple 2 :

$\mathcal{C}$: $y = -x^2$

On passe de Γ à $\mathcal{C}$:

- en multipliant par – 1 les ordonnées de tous les points de Γ ;

- par la symétrie axiale d'axe (Ox) si le repère est orthogonal.

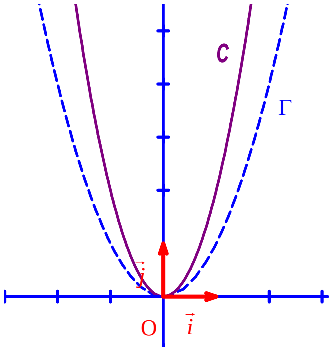


On ne dit pas que les courbes sont « contraires », ni « opposées », ni « inverses ».

• Exemple 3 :

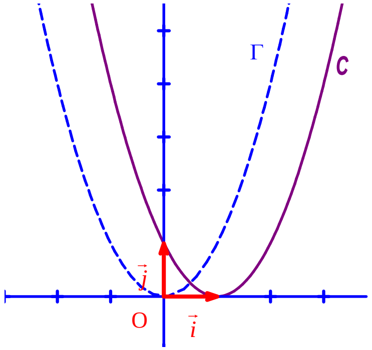
$\mathcal{C}$: $y = 2x^2$

On passe de Γ à $\mathcal{C}$ en multipliant par 2 les ordonnées de tous les points de Γ.



• Exemple 4 :

$\mathcal{C}$: $y = (x-1)^2$



On passe de Γ à $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.

2°) Cas particulier très important (propriété admise sans démonstration)

La courbe d'équation $y = ax^2$ est obtenue en multipliant par a les ordonnées de tous les points de la courbe de la fonction « carré ».
C'est une parabole de sommet O tournée vers le haut si $a > 0$; tournée vers le bas si $a < 0$.

Plus a est grand en valeur absolue, plus la parabole est « resserrée ».

3°) Paraboles obtenues par translation (propriétés admises sans démonstration)

• Propriété 1 :

La courbe d'équation $y = (x-\alpha)^2$ est l'image de la courbe d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\alpha\vec{i}$.

• Propriété 2 :

La courbe d'équation $y = x^2 + \beta$ est l'image de la courbe d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$.

Ces propriétés sont admises sans démonstration mais on peut les vérifier aisément en traçant les courbes de fonctions sur calculatrice ou sur ordinateur.

4°) Application aux tracés « à la main »

Tracé rapide de courbes admettant une équation de l'une de trois formes des propriétés (courbes de fonctions associées à la fonction « carré » admettant une équation de la forme $y = ax^2$, $y = (x-\alpha)^2$, $y = x^2 + \beta$).
On peut éventuellement tracer la parabole de la fonction « carré » puis on effectue un tracé point par point.

IV. <u>Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré</u>

1°) Propriété de base (admise sans démonstration)

$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

$\mathcal{C}$: $y = ax^2 + bx + c$
Γ : $y = ax^2$
On pose : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

On passe de Γ à $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.

N.B. : L'image du point O par cette translation est le point $S \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$.

On notera que la fonction f est <u>une</u> fonction associée à la fonction « carré ».

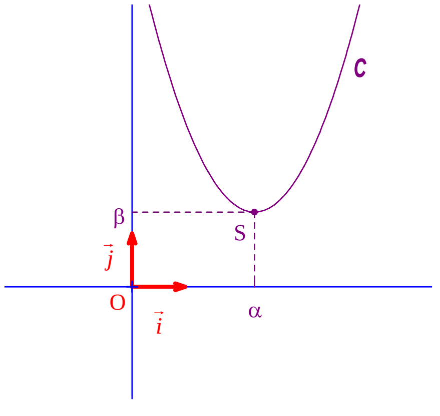
2°) Propriété (représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré)

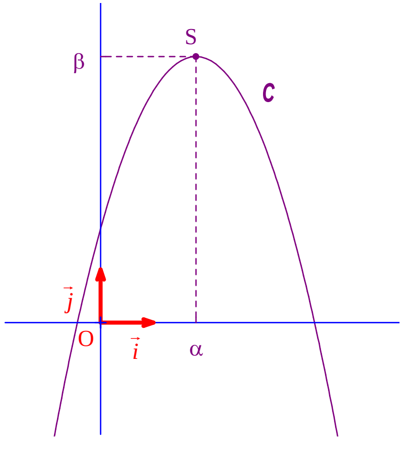
Cette propriété résulte du 1°).

> La courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est une **parabole** de **sommet** $S \left| \begin{array}{l} -\dfrac{b}{2a} \\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) \end{array} \right.$.
>
> • Si $a > 0$, alors les deux branches infinies sont **tournées vers le haut** (on dit aussi vers les $y > 0$; on dit que la fonction f est convexe).
> • Si $a < 0$, alors les deux branches infinies sont **tournées vers le bas** (on dit aussi vers les $y < 0$; on dit que la fonction f est concave).
>
> Si le **repère orthogonal**, elle admet la droite Δ d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ pour **axe de symétrie**.

N.B. : $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Il n'est cependant pas utile d'apprendre ce résultat.





On notera que le sommet d'une parabole, en dépit de son nom, peut correspondre à un maximum ou à un minimum.

3°) Tracé (à savoir par cœur)

• On place le sommet S.
• On utilise quelques points (au moins deux de part et d'autre du sommet ; cela fait 5 points).
On essaie, dans la mesure du possible, d'obtenir des points à coordonnées entières.
• On relie ces points harmonieusement à la main en respectant la forme arrondie de la parabole au sommet.

4°) Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto -2x^2 + 6x - 1$

Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

(Recensement des coefficients : $a = -2$; $b = 6$; $c = -1$)

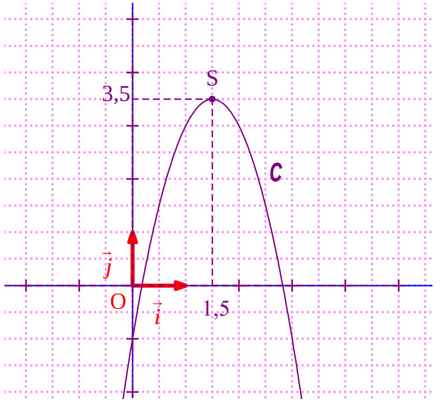
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times(-2)} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet $S \left| \begin{array}{l} x_S = \dfrac{3}{2} \\ y_S = \dfrac{7}{2} \end{array} \right.$ tournée vers le « bas » car $a < 0$.

On cherche au moins cinq points.

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3
y	-1	3	$\frac{7}{2}$	3	-1



La parabole arrive bien « platement » au sommet (la parabole est « arrondie » au sommet).

5°) Remarques

• Lien avec le tableau de variation

On voit que les coordonnées du sommet de la parabole qui représente la fonction apparaissent dans le tableau de variations de la fonction.

• Lien avec les équations du second degré

Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ sont les abscisses des points d'intersection (s'ils existent) de la courbe d'équation $y=ax^2+bx+c$ et de l'axe des abscisses.

Travail à faire

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de rentrer les coefficients a, b, c d'une fonction polynôme f du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ et qui affiche en sortie les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f.

On peut ensuite réaliser le programme correspondant sur calculatrice ou sur ordinateur.

Essayer ensuite le programme lorsque :

1. $a = 2$; $b = -4$; $c = 3$

2. $a = -1$; $b = -6$; $c = -8$

Entrée :
Saisir a, b, c

Traitement :
X prend la valeur $-\dfrac{b}{2a}$
Y prend la valeur $a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$

Sortie :
Afficher X, Y

Ou

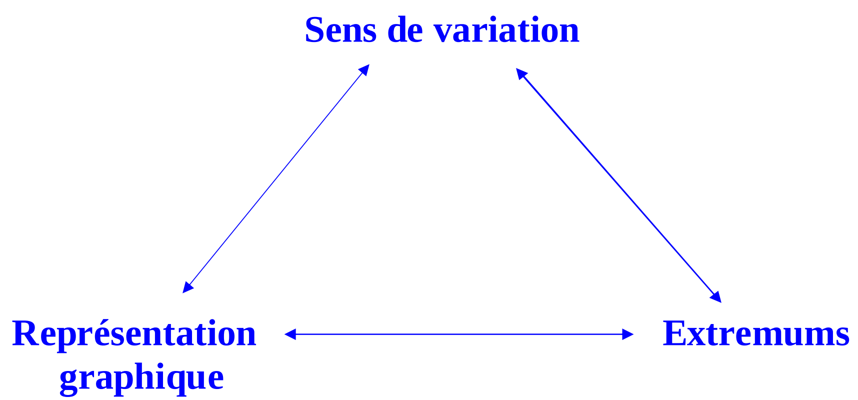
Entrée :
Saisir a, b, c

Traitement :
X prend la valeur $-\dfrac{b}{2a}$
Y prend la valeur $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

Sortie :
Afficher X, Y

Cours oral

Schéma pour commencer



Ce chapitre est plus ou moins une révision de seconde.

L'un des objectifs du chapitre est de revoir le vocabulaire usuel des fonctions appliqué aux fonctions polynômes du second degré.
En particulier, ce chapitre est l'occasion de revenir sur la notion de courbe d'une fonction et sur la notion d'équation de courbe.

La fonction ne peut être confondue avec sa courbe.

$$\begin{array}{c}\text{Fonction } f \\ \big\downarrow \\ \text{Courbe } \mathcal{C}\end{array}$$

Ce chapitre complète l'étude des fonctions pour une famille de fonctions particulières : la famille des fonctions polynômes du second degré.
Comme pour les fonctions en général, on travaille dans des différentes registres (ou cadres) : numérique, algébrique, graphique (géométrique).

Il est important d'être capable de passer d'un registre à l'autre (aller-retour d'un registre à l'autre), de relier des propriétés graphiques à des propriétés algébriques.

I. Sens de variation d'une fonction polynôme du second degré

1°) Démonstration

On travaille avec la FC.
On travaille en « littéral ».

2°) Propriété

• Cette règle ne porte pas de nom.

• On retient que la « valeur charnière » du tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré est $-\dfrac{b}{2a}$.

• L'énoncé utilise une notation qui a déjà été vue pour les fonctions (mais qui n'a pas beaucoup été utilisée).

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Flèche **« à valeurs dans »**

Flèche **« à valeurs dans »** : $\longrightarrow$ (sans talon) à distinguer de la flèche **« a pour image »** (à talon)

Exemples d'utilisation :

Fonction « carré »

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Fonction « racine carré »

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Pour la fonction « carré », peut-on remplacer $\mathbb{R}_+$ par $[1\,;+\infty[$? Non

$[1\,;+\infty[$ est un intervalle : c'est bien un ensemble (sous-ensemble de $\mathbb{R}$)

Fonction « carré »

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$\quad x \longmapsto x^2$

$x \in \mathbb{R}$ entraîne $x^2 \in \mathbb{R}_+$

Fonction « racine carrée »

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$

$\quad x \longmapsto \sqrt{x}$

$x \in \mathbb{R}_+$ entraîne $\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$.

Plus généralement :

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

(en général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles)

Notion d'**ensemble de départ** et d'**ensemble d'arrivée**.

Visualisation graphique :

- Dans la règle, $a \neq 0$ donc a ne peut pas être égal à 0.

- Seul le signe de a a une influence.
  Les signes de b et c n'ont pas d'influence.

- Il n'y a pas de règle pour les variations des fonctions polynômes de degré supérieur à 2 : 3, 4 ou plus.

II. Extremums d'une fonction polynôme du second degré

Un extremum d'une fonction polynôme du second degré est toujours un **extremum global.**

Qu'est-ce qu'un **extremum local** ?

La notion d'optimisation.

OPTIMISATION → **MAXIMISATION** / **MINIMISATION**

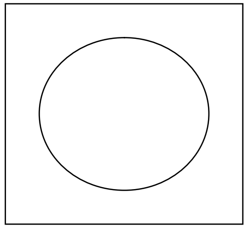
(« optimal » ça veut dire « meilleur », « On pense plus au meilleur qu'au pire » m'a dit Antoine Lieubray)

1) Problèmes d'optimisation abordées en 3^e^ : avec le PGCD (nombre maximal de sachets de bonbons, bouquets, groupes etc.)

2) Exemple de problème d'optimisation tout bête (inspiré de l'exercice 46 qui se trouve à la page 233 dans le livre de seconde Hachette, Déclic)

Une piscine circulaire doit être construite dans un jardin carré.

Condition pour que la piscine ait une aire maximale ?
Elle doit être tangente aux côtés du carré.



Autre exemple : parmi tous les rectangles de périmètre donné, quel est celui d'aire maximale ?

Les problèmes d'optimisation :

Cela permet de résoudre des problèmes concrets (par exemple, contenance maximale pour une boîte de conserve).

Le problème de la courbe de longueur donnée qui donne la plus grande aire (par exemple, nous verrons que parmi tous les rectangles de périmètre donné, celui qui l'aire maximale est le carré, ça paraît évident, c'est beaucoup moins évident à démontrer).
Pour une courbe quelconque, le problème est très difficile à démontrer (c'est ce qu'on appelle le problème des « isopérimètres ».

Les élèves ont déjà rencontré des problèmes d'optimisation (avec les PGCD notamment).

Les fonctions permettent de résoudre certains problèmes d'optimisation (nous allons le voir en exercices avec les fonctions polynômes du second degré, nous le reverrons avec les fonctions générales)

Un exemple de problème d'optimisation très important en balistique : angle de tir qu'il faut en balistique (utilisé en sport avec les lancers de poids ou de javelot, l'angle précis pour que l'objet aille le plus loin possible doit être égal à 45 °, vous pouvez voir ça sur mon site dans la rubrique divers avec les paraboles en sport ; ce type de problème sera étudié en Terminale avec l'étude des mouvements).

D'autres problèmes sont étudiés avec les graphes (trajet de longueur minimale).

Un autre type de problème d'optimisation est étudié au collège lorsque l'on aborde la notion de distance d'un point à une droite.

IV. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Les deux branches de la parabole ne peuvent jamais être confondues (la parabole ne peut jamais être confondue avec une demi-droite).

$y = ax^2 + bx + c$: animation sur *Geogebra* pour faire varier a, b, c.

À lire :

- Les paraboles en sport

- Les paraboles en architecture

Compléments

Culture générale :

- mouvements paraboliques (trajectoires) : jets d'eau, balistique…

- paraboles en sport (lancer de poids ou de javelot)

- parabole et ponts