Narration de recherche sur les boîtes de conserve

Le vendredi 30 septembre 2011

Narration de recherche

Remarques sur la forme

Narration = récit.

Il faut raconter les étapes de la recherche en marquant la chronologie avec des mots ou expression (« tout d'abord », « ensuite » …).

Le temps employé : passé composé (« J'ai pensé à », « J'ai cherché », « J'ai exprimé »…)

Intérêt : lancer en chantier un problème simple à comprendre qui va permettre de rencontrer de nombreuses fonctions.

Problème qui se pose vraiment à un industriel : ce qui importe c'est ce qu'il y a dans la boîte de conserve, pas la boîte de conserve. Un industriel fera appel à un bureau d'étude pour minimiser l'aire (donc la quantité de métal, et pas suite, le coût de fabrication).
Famille des problèmes d'optimisation : aire minimale.

Pour commencer :

Faire une figure.
On représente un cylindre en perspective.

1. Première étape :

Mise en évidence des inconnues.
On va nommer des variables : *r* et *h*.
Grandeurs.
Problème des unités : 1 l = 1 dm^3 (on cherche dans un livre de maths, sur Wikipédia, dans un agenda…)
On va noter *r* le rayon du cylindre de base en dm et *h* la hauteur en dm.

Possibilité des faire des essais. Impossibilité de tous les faire. Voie sans issue.

2. Deuxième étape :

Traduction de la contrainte à l'aide des variables *r* et *h*.
On cherche la formule du volume d'un cylindre de révolution : $\mathrm{V} = \pi r^2 \times h$.

3. Troisième étape :

Expression de l'aire totale du cylindre en fonction des variables *r* et *h*.
$\mathcal{A} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Problème : trouver la formule de l'aire totale d'un cylindre.
On cherche dans un livre de maths : la formule n'apparaît pas.
On doit la retrouver soi-même.
Faire le patron d'un cylindre de révolution.
Le patron est constitué d'un rectangle et de deux disques.

4. Quatrième étape :

Définir une fonction en fonction d'une seule variable.

V = 1 donc $\pi r^2 \times h = 1$ donc $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

$\mathcal{A} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \dfrac{1}{\pi r^2}$

$\mathcal{A} = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}$

On considère la fonction $f : x \mapsto 2\pi x^2 + \dfrac{2}{x}$ (expression complexe).

Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$.

5. Cinquième étape :

Déterminer le minimum de cette fonction.
On peut chercher les variations de cette fonction

La fonction *f* n'est pas une fonction affine ni une fonction polynôme du second degré.

On peut travaille avec les inégalités mais ce n'est pas facile.
On peut essayer d'utiliser les règles sur les sens de variation (somme, produit, inverse, racine carrée mais on n'y arrive pas).

- Outils graphiques : calculatrice graphique ou logiciel tel que *Geogebra* (pour taper π écrire pi)
Conjecture : lecture graphique du minimum d'une fonction.
Problème de fenêtre graphique pour bien voir la partie de courbe intéressante.
Fonctionnalité de la calculatrice pour déterminer les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Outil de calcul formel (par exemple *XCas*)
- Outils algorithmiques : algorithme et programme pour déterminer une valeur approchée d'un extremum de fonctions

En fait dès qu'on prononce le nom de variable, on pense aux fonctions ou aux algorithmes.
Il est cependant difficile de commencer par un algorithme.

Le minimum de la fonction est environ égal à $y \approx 5{,}5377$; il est obtenu pour $x \approx 0{,}5319$.

Le rayon du cylindre dont l'aire est minimale est environ égal à 0,5319 dm soit environ 5,319 cm.
Ainsi, la hauteur du cylindre vaut alors $\dfrac{1}{\pi\, {r_{\min}}^2} \approx 1{,}1251$ dm soit environ 11,252 cm.

6. Sixième étape :

Prendre une boîte de conserve cylindrique de 1 litre (aller dans un kebab) et vérifier les dimensions.

Conclusion :

Récapitulons la démarche :

Variables → **Fonction** → **Minimum**

Variables ↓ **2 variables liées par une contrainte**

Fonction ↓ **une seule variable**

Minimum ↓ **courbe**
algorithme
calcul formel

En l'état actuel des connaissances, impossibilité de traiter le problème de manière exacte.
On doit se contenter d'une résolution approchée.
Il semble que lorsque l'aire est minimale, la hauteur soit égale au double du rayon du disque de base.
Problème : trouver une valeur exacte.

En effet, impossibilité d'étudier les variations de la fonction qui a été mise en évidence.

Nécessité de disposer d'un nouvel outil plus puissant pour étudier les variations d'une fonction.

Quand on n'arrive pas à résoudre un problème, on se tourne vers les outils technologiques.

Il est intéressant de cherche ce type de problème.
Permet de s'investir dans une véritable démarche de recherche et d'investigation.
Permet de s'approprier véritablement les notions mathématiques (méthode active).

Consolide l'apprentissage des notions mathématiques étudiées en classe.

Pour aller plus loin

Ce problème peut être étudié pour d'autres formes de boîte : boîte parallélépipédique par exemple.

Ce problème est un problème de conditionnement et d'emballage.

Dire aux élèves qu'ils doivent produire le travail d'une durée comprise entre 1 h et 2 h (pas plus de deux heures).

Ne pas demander d'aide.

Ne pas communiquer entre groupes.

Rechercher chacun personnellement les formules manquantes.