1ère S

Exercices sur l'utilisation de règles pour le sens de variation de fonctions

• On résoudra les exercices $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{13}$, $\boxed{14}$, $\boxed{15}$ grâce à des tableaux de variation (donc quasiment sans rédaction).

• On résoudra les exercices $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ en rédigeant (donc sans utiliser de tableaux).
On respectera les modèles de rédaction proposés dans chaque exercice.

• Pour tous les exercices sauf le $\boxed{3}$, vérifier toutes les réponses en traçant les courbes représentatives des fonctions à l'aide d'une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.
Faire les tableaux et les flèches de variations à la règle.

$\boxed{1}$ En utilisant le sens de variation de fonctions de référence, dresser le tableau de variation des fonctions $f : x \mapsto x^3 - 1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 2$.

$\boxed{2}$ En utilisant le sens de variation de fonctions de référence, dresser le tableau de variation des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto -\dfrac{3}{x}$.

$\boxed{3}$ On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-4		0		3
Variations de f	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Dresser les tableaux de variation des fonctions f_1, f_2, f_3 définies par $f_1(x) = 2f(x)$, $f_2(x) = -f(x)$, $f_3(x) = f(x) - 2$. Faire un tableau par fonction.

$\boxed{4}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 1$.
Représenter la fonction f sur l'écran d'une calculatrice.
Conjecturer alors les variations de f sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$ en recopiant et complétant les phrases ci-dessous :

« D'après la calculatrice, il semble que la fonction f soit ………………… sur $]-\infty\,;0]$ et ……………….. sur $[0\,;+\infty[$. »

Le but de l'exercice est de démontrer cette conjecture en utilisant les propriétés du cours.

On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = -3x^2$.
On a donc $f(x) = v(x) + 1$.

Recopier et compléter :

Sens de variation de f sur $]-\infty\,;0]$	Sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$
u est ……………………….. sur $]-\infty\,;0]$. Donc v est ……………………… sur $]-\infty\,;0]$. On en déduit que la fonction f est ………………………… sur $]-\infty\,;0]$.	u est ……………………….. sur $[0\,;+\infty[$. Donc v est ………………………. On en déduit que la fonction f est ………………………… sur $[0\,;+\infty[$.

(On notera que dans chaque colonne de ce tableau, on a le même intervalle de définition).

$\boxed{5}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3 - 2\sqrt{x}$.
Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle I.

$\boxed{6}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1°) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Représenter la fonction f sur l'écran d'une calculatrice.
Conjecturer alors les variations de f sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$ en recopiant et complétant les phrases ci-dessous :

« D'après la calculatrice, il semble que la fonction f soit ………………… sur $]-\infty\,;0]$ et ……………….. sur $[0\,;+\infty[$. »

3°) Le but de la question est de démontrer cette conjecture à l'aide des propriétés sur le sens de variation d'une fonction.

a) On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^2 + 1$.
Donner le sens de variations de u sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$.
En déduire celui de la fonction v sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$.

b) En observant que l'on a $f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$, déduire directement le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$.

$\boxed{7}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = $\left]-\infty\,;\dfrac{5}{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt{5-2x}$.
Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle I.

$\boxed{8}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = $]-\infty\,;10]$ par $f(x) = \sqrt{10-x}$.
Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle I.

$\boxed{9}$ Déterminer le sens de variation sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ en utilisant la somme de deux fonctions de référence.

10 Déterminer le sens de variation sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ de la fonction $f : x \mapsto 5-\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$ en utilisant la somme de deux fonctions de référence.

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x-\frac{1}{x}$.

Étudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
Dresser le tableau de variation de f (faire les flèches de variations à la règle).

On n'oubliera pas de mettre une double barre pour la valeur 0 qui est valeur interdite Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide d'une calculatrice graphique ou à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = -x+1+\frac{1}{2x-3}$.

Étudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$ et $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

13 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Étudier les variations de f.

14 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+2}$.

1°) Démontrer que pour tout $x \neq -2$, on a : $f(x) = 2-\frac{5}{x+2}$.

2°) Étudier les variations de f.

15 Déterminer le tableau de variation des fonctions $f : x \mapsto x^2-1$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$.

16 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3-4x+6$.
1°) Représenter graphiquement la fonction f sur une calculatrice.
2°) Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution x_0 de l'équation $f(x)=0$.

17 On considère l'équation $3-\sqrt{x} = x^3$ (1).
1°) Représenter graphiquement les fonctions $f : x \mapsto 3-\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^3$ sur une calculatrice.
2°) Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution x_0 de l'équation (1).

Corrigé

- On aborde dans ces exercices le problème de la quantification et de la rédaction des fonctions.
- Il convient de bien distinguer les tableaux avec des images ou sans images.

1 Utilisation de la règle

> u est une fonction monotone sur un intervalle I.
> k est un réel.
>
> La fonction f définie par $f(x)=u(x)+k$ a les mêmes variations que u sur I.

$\boldsymbol{f : x \mapsto x^3 - 1}$ $\qquad$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

La fonction de référence associée à *f* est la fonction « cube ».
Le sens de variation de la fonction *f* est le même que celui de la fonction « cube ».

Donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3		↗	

x	$-\infty$		$+\infty$
Var. de f		↗	

Il n'y a pas à mettre 0 dans le tableau de variation de variation de la fonction cube car il n'y a pas de changement de variation en 0 (0 ne joue pas de rôle particulier pour le sens de variation de la fonction cube).

$\boldsymbol{g : x \mapsto \frac{1}{x} + 2}$ $\qquad$ $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$

La fonction de référence associée à *f* est la fonction « inverse ».
Les variations de la fonction f sont les mêmes que celles de la fonction « inverse ».
Donc *f* est strictement décroissante sur]– ∞ ; 0[et sur]0 ; +∞[.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var de g		↘	‖	↘	

Dans le premier tableau de variation, on ne voit pas qu'il faut ajouter – 1 aux valeurs des images de la fonction « cube » pour obtenir les images par la fonction *f*.

Dans le deuxième tableau de variation, on ne voit pas qu'il faut ajouter 2 aux valeurs des images de la fonction « inverse » pour obtenir les images par la fonction *f*.

---

2 Utilisation de la règle

> u est une fonction définie sur un intervalle I.
> k est un réel non nul.
>
> La fonction f définie par $f(x)=k\times u(x)$ a les mêmes variations que u sur I si $k > 0$,
> a les variations contraires de u sur I si $k < 0$.

$\boldsymbol{f : x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$

u est la fonction « racine carrée » et $k=\frac{1}{2}$.

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗	

$\frac{1}{2} > 0$

x	0		$+\infty$
Var. de f	0	↗	

$g : x \mapsto -\dfrac{3}{x}$ $\qquad$ $D_g = \mathbb{R}^*$

u est la fonction « inverse » et $k = -3$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

$-3 < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var de g		↗	‖	↗	

Bilan des exercices $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$:

Dans ce type d'exercices, on repère d'abord la « fonction de base » (fonction de référence).

$\boxed{3}$ Utilisation des règles sur le sens de variation :

- de la somme d'une fonction et d'un réel
- du produit d'une fonction et d'un réel

x	-4		0		3
Variations de f_1	-6	↗	2	↘	-2

x	-4		0		3
Variations de f_2	3	↘	-1	↗	1

x	-4		0		3
Variations de f_3	-5	↗	-1	↘	-3

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto -3x^2 + 1$

D'après la calculatrice, il semble que la fonction f soit croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Quelques commentaires dans un style parlé :

- C'est une « grosse » fonction qui est « composée », « formée » de plusieurs fonctions.
- C'est comme si on disait $f(x) = v(x) + 1$.
- Le sens variation est constant.

On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = -3x^2$.
On a donc $f(x) = v(x) + 1$.

On complète les raisonnements enchaînés suivants (il s'agit d'une suite d'implications).
Dans les deux cas, on part de la fonction « carré ».

Sens de variation de f sur $]-\infty\,;0]$	Sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$
u est décroissante sur $]-\infty\,;0]$. Donc v est croissante sur $]-\infty\,;0]$ On en déduit que la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;0]$.	u est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Donc v est décroissante sur $[0\,;+\infty[$. On en déduit que la fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Sans nommer deux fonctions u et v, on pourrait aussi rédiger comme suit.

Sens de variation de f sur $]-\infty\,;0]$

La fonction $x \mapsto x^2$ est .... $]-\infty\,;0]$.
La fonction $x \mapsto -3x^2$ est .... $]-\infty\,;0]$.
La fonction $x \mapsto -3x^2 + 1$ est .... $]-\infty\,;0]$.

Sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$

La fonction $x \mapsto x^2$ est .... $[0\,;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto -3x^2$ est .... $[0\,;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto -3x^2 + 1$ est .... $[0\,;+\infty[$.

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto 3-2\sqrt{x}$ $\qquad$ $D_f = \mathbb{R}_+$

Commentaire :

L'expression de la fonction f est $f(x) = 3-2\sqrt{x}$.
Cette expression peut être décomposée en $k_1 + k_2 u(x)$ avec $k_1 = 3$, $k_2 = -2$, $u(x) = \sqrt{x}$.

Il y a deux étapes obligatoires.

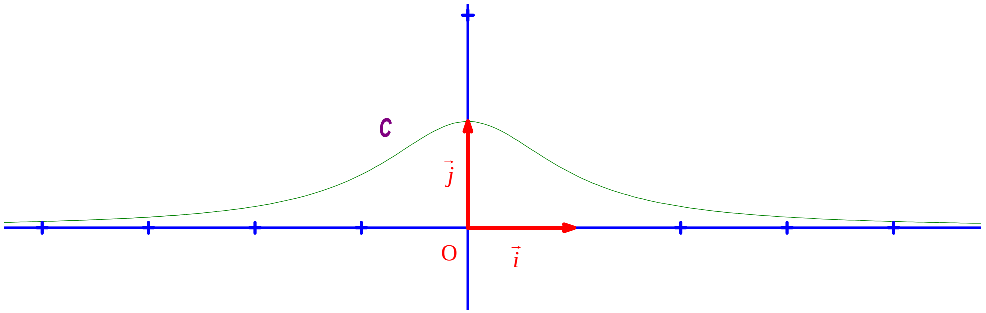
x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$	
$-2\sqrt{x}$	0 $\searrow$	
$3-2\sqrt{x}$	3 $\searrow$	

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

1°) **Justifions que f est définie sur $\mathbb{R}$.**

Pour tout réel x, $x^2+1 \neq 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2°)



D'après la calculatrice, il semble que la fonction f soit croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

3°)
a) $u(x) = x^2$ $\qquad$ $v(x) = x^2 + 1$

u est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad v(x) = u(x) + 1$ (étape importante qui montre le lien entre u et v).

Donc v est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad v(x) > 0$ (1) [important à dire pour pouvoir appliquer la propriété du cours] donc f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Remarque :

On peut aussi formuler autrement l'inégalité (1) en disant que la fonction v est à valeurs dans $]0\,;+\infty[$.

$\boxed{7}$ $f : x \mapsto \sqrt{5-2x}$

$D_f = \left]-\infty\,;\dfrac{5}{2}\right]$

La fonction f est « associée » à la fonction « racine carrée ».
f est une fonction associée à la fonction « racine carrée ».

On peut voir la fonction f comme enchaînement d'une fonction affine suivie de la fonction « racine carrée ».

x	$-\infty$	$\dfrac{5}{2}$	$+\infty$
$5-2x$ *	$+$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-$
$f(x)$	$\searrow$	0	(hachuré)

* Variations d'une fonction affine

La fonction $x \mapsto 5-2x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et change de signe en $\dfrac{5}{2}$.

Elle devient négative à partir de $\dfrac{5}{2}$. On aura donc des valeurs interdites à partir de $\dfrac{5}{2}$.

***f* est décroissante sur I.**

On visualise la courbe représentative de f sur l'écran d'une calculatrice graphique.
Attention à bien mettre des parenthèses lorsque l'on rentre la fonction dans la calculatrice : $\sqrt{\ }$ (5 − 2 * X).

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto \sqrt{10-x}$

$D_f =]-\infty\,;10]$

Étudions le sens de variation de f sur $]-\infty\,;10]$.

La fonction f est « associée » à la fonction « racine carrée ».

La fonction f peut être vue comme l'enchaînement de deux fonctions : la fonction $x \mapsto 10-x$ suivie de la fonction « racine carrée ».

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$10-x$		+ ↘	0	↘ −	
$f(x)$		↘	0	//////	

f est décroissante sur I.

Le but des exercices $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ est de rédiger sur les fonctions.

$\boxed{9}$ $f : x \mapsto x^2+\sqrt{x}$

$D = \mathbb{R}_+$

Étudions le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

On pose $u(x)=x^2$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

u et v sont croissantes sur $[0\,;+\infty[$ (ce sont deux fonctions de référence).

Or $f=u+v$.

Donc **f est croissante sur $[0\,;+\infty[$**. (Le tableau de variation n'est pas demandé).

On pourrait dire « strictement croissante ».

$\boxed{10}$ $f : x \mapsto 5-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}$

$D = \mathbb{R}^*$

Étudions le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0[$.

L'expression de la fonction est « formée » de deux fonctions (on a une fonction dont l'expression est « formée » de deux fonctions).

On pose $u(x)=5-\dfrac{1}{2}x$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$.

u et v sont décroissantes sur $]-\infty\,;0[$ (u est une fonction affine et le coefficient de x est strictement négatif).

Or $f=u+v$.

Donc **f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$**.

(Le tableau de variation n'est pas demandé).

On pourrait dire « strictement décroissante ».

$\boxed{11}$ $f : x \mapsto x-\dfrac{1}{x}$

$D = \mathbb{R}^*$

Étudions le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0[$.

On pose $u(x)=x$ et $v(x)=-\dfrac{1}{x}$.

u et v sont croissantes sur $]-\infty;0[$ (la fonction u est une fonction affine, et même linéaire, et le coefficient de x est strictement positif ; pour la fonction v on explique son sens de variation par rapport à celui de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$).

$f=u+v$

Donc f est croissante sur $]-\infty;0[$.

Idem sur $]0\,;+\infty[$.

$\boxed{12}$ $f : x \mapsto -x+1+\dfrac{1}{2x-3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Étudions le sens de variation de f sur les intervalles qui constituent D.

Même démarche qu'à l'exercice précédent.

On pose $u(x)=-x+1$ et $v(x)=\dfrac{1}{2x-3}$.

u et v sont décroissantes sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$ (normalement il faudrait de nouveau détailler pour v).

Or $f=u+v$.

Donc f est décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

$\boxed{13}$ $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Étudions le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

On procède en 3 étapes.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2+1		$\searrow$	1	$\nearrow$	
$\sqrt{x^2+1}$		$+$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

D'après les + indiquant le signe, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+1} > 0$.
Donc on peut appliquer la règle du sens de variation de l'inverse d'une fonction.

$\boxed{14}$ **Étude des variations d'une fonction homographique**

$f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+2}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

f est une fonction homographique.

On appelle **fonction homographique** le quotient de deux fonctions affines c'est-à-dire une expression admettant une expression de la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Commentaire :

Une fonction homographique n'est pas un cas particulier de fonction « inverse » comme me l'a dit Amaury Lacaille le 12-10-2012.
On peut éventuellement dire que c'est une fonction associée à la fonction « inverse ».

1°) **Démontrons que pour tout $x \neq -2$, on a : $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+2}$.**

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $\quad f(x) = \dfrac{2(x+2)-5}{x+2}$ (on « incruste » le dénominateur au numérateur)

$= \dfrac{2(x+2)}{x+2} - \dfrac{5}{x+2}$

$= 2 - \dfrac{5}{x+2}$ (forme canonique de la fonction homographique)

2°) **Étudions les variations de f.**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+$	
$\dfrac{1}{x+2}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	
$-\dfrac{5}{x+2}$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

$\boxed{15}$ $f : x \mapsto x^2 - 1$; $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1 ; -1\}$

Étudions les variations de f et g.

On observe que g est l'inverse de f (on a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$).

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2		$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		$+$ $\searrow$	0	$-$ $\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

On vérifie les variations en traçant les représentations graphiques des fonctions *f* et *g* sur calculatrice.

16 $f : x \mapsto x^3 - 4x + 6$

$D_f = \mathbb{R}$

1°) On peut prendre la fenêtre graphique suivante :

X min = – 8
X max = 15
X grad = 0,5
Y min = – 8
Y max = 20
Y grad = 1
Y res = 1

On peut aussi prendre une autre racine.

2°) **Déterminons à l'aide de la calculatrice un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution x_0 de l'équation *f* (*x*) = 0.**

La calculatrice affiche : X = – 2,525102   Y = 0.

On peut donc écrire $-2,53 < x_0 < -2,52$.

On ne peut pas donner la valeur exacte de x_0 avec le cours de 1ère.

On pourrait aussi utiliser :

- la méthode de balayage ;

- la méthode de dichotomie.

Certains logiciel de calcul formel permettent cependant de trouver la valeur exacte de x_0 (ce n'est pas le cas de XCas).

17 $3 - \sqrt{x} = x^3$ **(1)**

1°) $f : x \mapsto 3 - \sqrt{x}$; $g : x \mapsto x^3$

On peut prendre la fenêtre graphique suivante :

X min = 0
X max = 4
X grad = 0,5
Y min = – 1
Y max = 20
Y grad = 1
Y res = 1

2°) **Déterminons à l'aide de la calculatrice un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution x_0 de l'équation (1).**

On cherche les coordonnées du point d'intersection des courbes de *f* et *g*.

La calculatrice affiche : X = 1,2360025   Y = 1,8882435.

On peut donc écrire $1,23 < x_0 < 1,24$.