1ère S — Exercices sur l'utilisation des fonctions de référence

1 Comparer sans calculatrice :

$\dfrac{1}{\pi-1}$ et $\dfrac{1}{\pi-2}$ $\qquad$ $(\pi-4)^2$ et $(\pi-5)^2$ $\qquad$ $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$ et $\left(\sqrt{2}-2\right)^3$

2 Déterminer le signe de x^3-8 suivant les valeurs de x. Faire un tableau de signes.

3 On considère la fonction $f : x \mapsto (x-3)^2-1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $I_1=[3\,;+\infty[$ et $I_2=]-\infty\,;3]$.

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1**

Soit u et v deux réels quelconques de l'intervalle I_1 tels que $u<v$.

Recopier et justifier chaque étape du raisonnement qui permet d'écrire les inégalités successives suivantes.

On a : $3\leq u<v$.
Étape 1 : $0\leq u-3<v-3$
Étape 2 : $0\leq (u-3)^2<(v-3)^2$
Étape 3 : $-1\leq (u-3)^2-1<(v-3)^2-1$

On a donc $f(u)<f(v)$.

La fonction f est donc ……………………………………….. sur I_1.

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2**
À l'aide d'une démarche analogue à celle du 1°), déterminer le sens de variation de f sur I_2.

3°) **Tableau de variation**

Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Le tableau doit être fait à la règle ainsi que les flèches de variations.
Calculer la valeur de l'extremum global.
Contrôler le résultat à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

4 On considère la fonction $f : x \mapsto (x+1)^2+3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Étudier le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $I_1=[-1\,;+\infty[$ et $I_2=]-\infty\,;-1]$ en utilisant la méthode des inégalités successives.

Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de l'extremum global.

Contrôler le résultat à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

5 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}-1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $I_1=]0\,;+\infty[$ et $I_2=]-\infty\,;0[$.

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1**

Soit u et v deux réels quelconques de l'intervalle I_1 tels que $u<v$.

Recopier et justifier chaque étape du raisonnement qui permet d'écrire les inégalités successives suivantes.

On a : $0<u<v$.
Étape 1 : $\dfrac{1}{u}>\dfrac{1}{v}$
Étape 2 : $\dfrac{1}{u}-1>\dfrac{1}{v}-1$
On a donc $f(u)>f(v)$.
.

La fonction f est donc ……………………………………….. sur I_1.

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2**

A l'aide d'une démarche analogue à celle du 1°), déterminer le sens de variation de f sur I_2.

3°) **Tableau de variation**

Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$. Contrôler graphiquement.

6 On considère la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\,3\,\}$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $I_1=]3\,;+\infty[$ et $I_2=]-\infty\,;3[$.

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1**

Soit u et v deux réels de l'intervalle I_1.

Recopier et justifier chaque étape du raisonnement qui permet d'écrire les inégalités successives suivantes.

On a : $3<u<v$.
Étape 1 : $0<u-3<v-3$
Étape 2 : $\dfrac{1}{u-3}>\dfrac{1}{v-3}$
Étape 3 : $-\dfrac{2}{u-3}<-\dfrac{2}{v-3}$
On a donc $f(u)<f(v)$.

La fonction f est donc ……………………………………….. sur I_1.

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2**

À l'aide d'une démarche analogue à celle du 1°), déterminer le sens de variation de *f* sur I_2.

3°) **Tableau de variation**

Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R} \setminus \{\ 3\ \}$. Contrôler graphiquement.

7 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x-4}{x+5}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ -5\ \}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ -5\ \}$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{x+5} - 1$.

2°) En utilisant le résultat de la question 1°), déterminer le sens de variation de la fonction *f* sur chacun des intervalles $I_1 = \left]-5\,;+\infty\right[$ et $I_2 = \left]-\infty\,;-5\right[$.

Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R} \setminus \{\ -5\ \}$. Contrôler graphiquement.

8 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5-x}$ définie sur $\left]-\infty\,;5\right]$.

Étudier le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $\left]-\infty\,;5\right]$ en utilisant la méthode des inégalités successives.

Établir le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de l'extremum global. Contrôler graphiquement.

9 Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f*.
Déterminer l'ensemble de définition de *f* en rédigeant scrupuleusement comme dans le cours.
On commencera par analyser les types de problèmes qui se posent.

① $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

② $f(x) = \sqrt{3-x}$

③ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

④ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

⑥ $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

⑦ $f(x) = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{x+3}$

⑧ $f(x) = \sqrt{5-x} + 2\sqrt{1+x}$

On rédigera ainsi :

« $f(x)$ existe si et seulement si …
si et seulement si …
si et seulement si … »

On conclura ainsi : $\boldsymbol{D}_f$ = …….

10 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\boldsymbol{D}$ de *f* sans expliquer.

2°) Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.

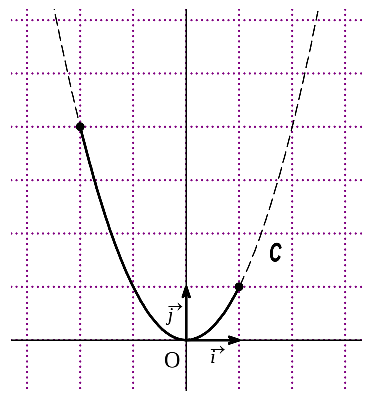
Recopier et compléter l'équivalence :

M $\in \mathcal{C}$ si et seulement si …………

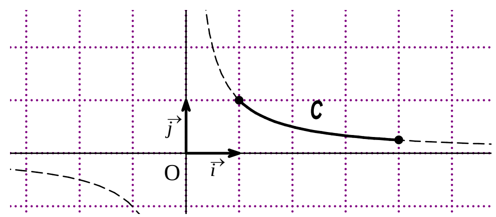
11 Dans chaque cas, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique d'une fonction *f* qui est la restriction à un intervalle I d'une fonction de référence.
Reproduire les graphiques ci-dessous.
Dans chaque cas, recopier et compléter la phrase :

« La fonction *f* est la restriction de la fonction ………. (donner le nom de la fonction) à l'intervalle I = ….. ».

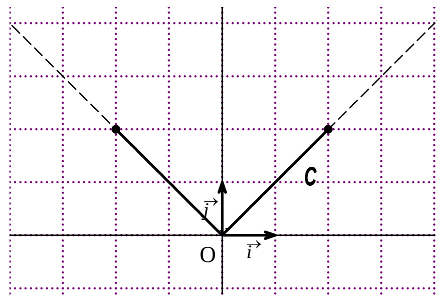
①



②



③



N.B. : On parle de **restriction** d'une fonction **à** un intervalle.

12 Dans chaque cas, déterminer la forme canonique du polynôme $f(x)$.

1°) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$

2°) $f(x) = 2x^2 + 10x - 2$

3°) $f(x) = x^2 + 6x$

4°) $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{5} + 1$

13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.

Le but de cette question est de déterminer le sens de variation f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ en utilisant la méthode des inégalités successives.

Soit u et v deux réels quelconques tels que $0 \leq u < v$.

Recopier et compléter en justifiant chaque étape :

$0 \leq u < v$

$0\ \ldots\ u^2 \ldots\ v^2$

$1\ \ldots\ u^2+1\ \ldots\ v^2+1$

$\dfrac{1}{u^2+1}\ \ldots\ \dfrac{1}{v^2+1}$

$\dfrac{2}{u^2+1}\ \ldots\ \dfrac{2}{v^2+1}$

Conclure : « La fonction f est ... sur $[0\ ;+\infty[$. »

14 Soit x un réel quelconque appartenant à l'intervalle $[-2\ ;5]$.

En procédant par encadrements successifs, déterminer le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{x-6}$.

On donnera la réponse sous la forme : $\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \dfrac{1}{x-6} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$.

15 Dans chaque cas, la fonction f peut s'obtenir en enchaînant deux fonctions de référence u et v. Préciser lesquelles.

On présentera selon le modèle ci-contre en refaisant un schéma à chaque fois.

f est la fonction définie par $f(x) = 3x^2$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend left, "f"] & x^2 \arrow[r, mapsto] & 3\,x^2 \\ & X \arrow[r, mapsto, "v"] & 3X \end{tikzcd}$$

On passe de x à $f(x)$ en enchaînant la fonction « carré » $u : x \mapsto x^2$ suivie de la fonction linéaire $v : x \mapsto 3x$.

Faire les flèches à la règle (en respectant bien la notation de la flèche à talon « a pour image », avec une petite barre). Bien respecter qu'il y a 2 fonctions. Bien mettre les flèches à talon.

1°) $f(x) = (3x)^2$; 2°) $f(x) = 3x^2 - 1$; 3°) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ 4°) $f(x) = \dfrac{4}{x} - 2$ 5°) $f(x) = (3x-1)^2$

16 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{5x-1}{x}$.

1°) Vérifier que pour tout $x \neq 0$ $\quad f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$.

2°) En déduire un enchaînement de fonctions de référence conduisant de x à $f(x)$.

17 Deux des enchaînements ci-dessous définissent la même fonction. Lesquelles ?

(1) On enchaîne la fonction « carré », suivie de la fonction affine $x \mapsto -x + 2$.

(2) On enchaîne la fonction affine $x \mapsto -x + 2$ suivie de la fonction « carré ».

(3) On enchaîne la fonction « carré », suivie de la fonction affine $x \mapsto x - 2$.

(4) On enchaîne la fonction affine $x \mapsto x - 2$ suivie de la fonction « carré ».

18 On enchaîne la fonction « carré », suivie de la fonction « racine carrée ».

Cet enchaînement définit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Préciser $f(x)$ en fonction de x.
Quelle est la fonction f définie par cet enchaînement ?

19 On enchaîne la fonction $u : x \mapsto x^2$, suivie de la fonction $v : x \mapsto x + 1$, suivie de la fonction $w : x \mapsto \sqrt{x}$.

Cet enchaînement définit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Préciser $f(x)$ en fonction de x.

20 Dans chaque cas, la fonction f peut s'obtenir en enchaînant trois fonctions de référence u, v, w.
Préciser lesquelles (il peut y avoir plusieurs solutions).

1°) $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^3$ 3°) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x+2}$.

Corrigé

$\boxed{1}$ Comparaisons sans calculatrice

• $\dfrac{1}{\pi-1}$ et $\dfrac{1}{\pi-2}$

On a : $\pi - 1 > \pi - 2 > 0$. Or la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

Donc $\dfrac{1}{\pi-1} < \dfrac{1}{\pi-2}$.

• $(\pi-4)^2$ et $(\pi-5)^2$

On a : $\pi - 5 < \pi - 4 < 0$. Or la fonction « carré » est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;0]$.

Donc $(\pi-4)^2 < (\pi-5)^2$.

• $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$ et $\left(\sqrt{2}-2\right)^3$

On a : $\sqrt{2}-2 < \sqrt{2}-1$. Or la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $\left(\sqrt{2}-1\right)^3 > \left(\sqrt{2}-2\right)^3$.

On peut évidemment vérifier tous les résultats précédents sur calculatrice.

$\boxed{2}$ Étude du signe de x^3-8

Astuce : $8=2^3$.

$x^3-8=x^3-2^3$

On utilise le sens de variation de la fonction « cube ».

• Si $x < 2$, alors $x^3<8$ (car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) d'où $x^3-8<0$.

• Si $x > 2$, alors $x^3>8$ (car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) d'où $x^3-8>0$.

• Si $x = 2$, alors $x^3=8$ d'où $x^3-8=0$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de x^3-8		$-$	0	$+$	

Autre méthode : purement algébrique

On factorise $x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$ (identité a^3-b^3).

On dresse un tableau de signes.

L'étude du signe de x^2+2x+4 nécessite de connaissances du chapitre sur le second degré.

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto (x-3)^2-1$

1°) **Sens de variation de *f* sur $I_1 = [3\ ;+\infty[$**

Soit u et v deux réels quelconques de l'intervalle I_1 tels que $u<v$.

On a : $3 \leq u < v$.

Étape 1 : $0 \leq u-3 < v-3$ (on soustrait 3 à chaque membre de l'inégalité)

Étape 2 : $0 \leq (u-3)^2 < (v-3)^2$ (on élève au carré chaque membre de l'inégalité)

Étape 3 : $-1 \leq (u-3)^2-1 < (v-3)^2-1$ (on enlève 1 à chaque membre de l'inégalité)

On a donc $f(u) < f(v)$.

La fonction *f* est donc **strictement croissante** sur I_1 (en effet, on est parti de $u < v$; on a obtenu $f(u) < f(v)$. Le sens de l'inégalité est conservé).

Il faut « reconstruire » la fonction étape par étape.

2°) **Sens de variation de *f* sur $I_2 =]-\infty\ ;3]$**

Soit u et v deux réels quelconques de l'intervalle I_2 tels que $u<v$.

On a : $u<v\leq 3$.

Étape 1 : $u-3<v-3\leq 0$

Étape 2 : $(u-3)^2>(v-3)^2\geq 0$

Étape 3 : $(u-3)^2-1>(v-3)^2-1\geq -1$

On a donc $f(u) > f(v)$.

La fonction *f* est donc **strictement décroissante** sur I_2 (en effet, on est parti de $u < v$; on a obtenu $f(u) > f(v)$. Le sens de l'inégalité est renversé).

3°) **Tableau de variation**

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Var. de *f*	↘	-1	↗

La variation change en 3.

$f(3) = (3-3)^2 - 1$
$= 0 - 1$
$= -1$

La fonction *f* a pour minimum – 1 ; il est obtenu pour $x = 3$.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto (x+1)^2 + 3$

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1 = [– 1 ; +∞[**

Méthode :
On « reconstruit » la fonction étape par étape (on reconstruit la fonction « au fur et à mesure »).

Soit *u* et *v* deux réels quelconques de l'intervalle I_1 tels que $u < v$.

On a : $-1 \leq u < v$.

Étape 1 : $0 \leq u+1 < v+1$ (on ajoute 1 à chaque membre de l'inégalité)
Étape 2 : $0 \leq (u+1)^2 < (v+1)^2$ (on élève au carré chaque membre de l'inégalité)
Étape 3 : $3 \leq (u+1)^2 + 3 < (v+1)^2 + 3$ (on ajoute 3 à chaque membre de l'inégalité)
On a donc $f(u) < f(v)$.

La fonction *f* est donc **strictement croissante** sur I_1.

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2 =]– ∞ ; – 1]**

Soit *u* et *v* deux réels quelconques de l'intervalle I_2 tels que $u < v$.

On a : $u < v \leq -1$.
Étape 1 : $u+1 < v+1 \leq 0$
Étape 2 : $(u+1)^2 > (v+1)^2 \geq 0$
Étape 3 : $(u+1)^2 + 3 > (v+1)^2 + 3 \geq 3$

On a donc $f(u) > f(v)$.

La fonction *f* est donc **strictement décroissante** sur I_2.

3°) **Tableau de variation**

x	– ∞	– 1	+ ∞
Var. de *f*	↘	3	↗

$f(-1) = 3$

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - 1$

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1 =]0 ; + ∞[**

De nouveau, on « reconstruit » la fonction *f* au fur et à mesure.

Soit *u* et *v* deux réels quelconques de l'intervalle I_1 tels que $u < v$.

On a : $0 < u < v$.
Étape 1 : $\dfrac{1}{u} > \dfrac{1}{v}$ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle]0 ; +∞[)
Étape 2 : $\dfrac{1}{u} - 1 > \dfrac{1}{v} - 1$ (on ajoute – 1 à chaque membre de l'inégalité)

La fonction *f* est donc **strictement décroissante** sur I_1.

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2 =]– ∞ ; 0[**

Même démarche.
…/…
La fonction *f* est donc **strictement décroissante** sur I_2.

3°) **Tableau de variation**

x	– ∞	0	+ ∞
Var de *f*	↘	‖	↘

N.B. : On peut aussi calculer $f(u) - f(v)$.
On évite ainsi la démarche algorithmique.

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 3 \}$

1°) et 2°) Même démarche qu'à l'exercice précédent.

La fonction *f* est strictement croissante sur I_1 et sur I_2.

3°) **Tableau de variation**

x	– ∞	3	+ ∞
Var de *f*	↗	‖	↗

$\boxed{7}$ **$f : x \mapsto \dfrac{-x-4}{x+5}$** définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

1°) **Démontrons que** $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ **$f(x) = \dfrac{1}{x+5} - 1$.**

« Quel que soit » (ou « Pour tout »)

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \quad f(x) = \dfrac{-x-4}{x+5}$

$$= \frac{-(x+5)+1}{x+5} \quad {}^*$$

$$= -\frac{x+5}{x+5} + \frac{1}{x+5} \quad \text{(on sépare)}$$

$$= -1 + \frac{1}{x+5}$$

Il s'agit d'une forme canonique de fonction homographique.
On cherche à « incruster » de force le dénominateur au numérateur.

2°) Même technique qu'à l'exercice précédent.

La fonction f est strictement décroissante sur I_1 et sur I_2.

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
Var de f	↘	‖	↘

On vérifie le résultat graphiquement.

Plusieurs remarques :

1. f est une fonction homographique (quotient de deux fonctions affines).

2. La forme de $f(x)$ obtenue à la question 1°) est appelée **forme canonique**. La variable x n'apparaît qu'à un seul endroit.
On ne parle de forme canonique que pour des fonctions polynômes du second degré ou pour des fonctions homographiques.
Pour déterminer les variations, on se sert de la forme du 1°) (forme canonique).

3. On ne peut pas dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ ou sur $]-\infty\,;-5[\, \cup\,]-5\,;+\infty[$ (on ne parle que de fonction croissante ou décroissante sur un intervalle).
Dans le tableau de variation de f, il y a une double barre sous le – 5 car la fonction n'est pas définie en – 5.
Graphiquement, la courbe représentative admet la droite d'équation $x = -5$ pour asymptote (on précisera beaucoup plus tard ce qu'est une asymptote, ce n'est pas exactement parce qu'il y a une valeur interdite).

$\boxed{8}$ **$f : x \mapsto \sqrt{5-x}$ définie sur $]-\infty\,;5]$**

Étudions le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;5]$ en utilisant la méthode des inégalités successives.

Soit u et v deux réels quelconques de l'intervalle $]-\infty\,;5]$ tels que $u < v$.

On a : $u < v \leq 5$.

$-u > -v \geq -5$ (on a multiplié les deux membres de l'inégalité précédente par – 1)

$5-u > 5-v \geq 0$

$\sqrt{5-u} > \sqrt{5-v} \geq 0$

$f(u) > f(v)$

La fonction f est donc **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;5]$.

x	$-\infty$	5
Var de f	↘	0

$\boxed{9}$ **Recherche d'ensembles de définition**

① $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\,;-2\}$ ② $\mathcal{D} =]-\infty\,;3]$ ③ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ④ $\mathcal{D} =]-\infty\,;-3[\,\cup\,[1\,;+\infty[$ ⑤ $\mathcal{D} =]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$
⑥ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ⑦ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\,;-3\}$ ⑧ $\mathcal{D} = [-1\,;5]$.

Commentaire général :

Attention à la rédaction :

« $f(x)$ existe **si et seulement si** …………… » ou « Pour que $f(x)$ existe, **il faut et il suffit que** … ».

Dans chaque cas, on doit analyser le type de problème qui se pose (quotient et racine carrée).

Solution détaillée :

① **$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$**

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 \neq 0$

si et seulement si $x^2 \neq 4$

si et seulement si $x \neq 2$ et $x \neq -2$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\,;-2\}$

② $f(x)=\sqrt{3-x}$

$f(x)$ existe si et seulement si $3-x\geq 0$ [Le radicande (ce qui est sous la racine) est une différence.]
si et seulement si $x\leq 3$

$\boldsymbol{D}=]-\infty\,;3]$

③ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+1\neq 0$
si et seulement si $x^2\neq -1$ (toujours vrai)

$\boldsymbol{D}=\mathbb{R}$

④ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+3\neq 0 \\ \dfrac{x-1}{x+3}\geq 0 \end{cases}$ (dénominateur non nul et radicande positif ou nul))

si et seulement si $\begin{cases} x\neq -3 \\ \dfrac{x-1}{x+3}\geq 0 \end{cases}$

(On écrit un système ; en gros, le bas doit être non nul et le quotient doit être positif ou nul).

Il faut résoudre une inéquation avec un tableau de signes ; attention aux doubles barres pour la valeur interdite.

$x-1=0$	$x+3=0$
$x=1$	$x=-3$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
SGN de $x-1$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $x+3$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
SGN de $\dfrac{x-1}{x+3}$		$+$	$\|\|$	$-$	0^{num}	$+$	

$\boldsymbol{D}=]-\infty\,;-3[\,\cup\,[1\,;+\infty[$

⑤ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x>0$

$\boldsymbol{D}=]0\,;+\infty[\,=\mathbb{R}_+^*$

⑥ $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+4\geq 0$ [Le radicande est une somme.]
si et seulement si $x^2\geq -4$ (toujours vrai)

$\boldsymbol{D}=\mathbb{R}$

⑦ $f(x)=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}$

On a deux quotients différents.

$f(x)$ existe si et seulement si $x-1\neq 0$ et $x+3\neq 0$
si et seulement si $x\neq 1$ et $x\neq -3$

$\boldsymbol{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\,;-3\}$

⑧ $f(x)=\sqrt{5-x}+2\sqrt{1+x}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} 5-x\geq 0 \\ 1+x\geq 0 \end{cases}$ (systèmes d'inéquations*)

si et seulement si $\begin{cases} x\leq 5 \\ x\geq -1 \end{cases}$

si et seulement si $-1\leq x\leq 5$

$\boldsymbol{D}=[-1\,;5]$

* On résout ce système. Il s'agit d'une intersection d'intervalles.

Erreur possible :

$f: x\mapsto\sqrt{x-2}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\sqrt{x-2}\geq 0$
si et seulement si …

$\boxed{10}$ **$f : x \mapsto \sqrt{x+1}$**

1°) $\mathcal{D} = [-1\ ;\ +\infty[$

2°) M $\in \mathcal{C}$ si et seulement si $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ y = \sqrt{x+1} \end{cases}$

$\boxed{11}$ On notera que pour une restriction utilise la préposition « à » et non de la préposition « sur ». On parle de restriction d'une fonction « à » un intervalle (et pas « sur »).
Comprendre le principe d'une restriction : on restreint l'ensemble de définition.

① La fonction f est la restriction de la fonction « carré » à l'intervalle I = [– 2, 1].

② La fonction f est la restriction de la fonction « inverse » à l'intervalle I = [1, 4].

③ La fonction f est la restriction de la fonction « valeur absolue » à l'intervalle I = [– 2, 2].

$\boxed{12}$ **Formes canoniques**

On « complexifie » à chaque fois l'écriture (on effectue une complexification de l'écriture) pour simplifier le problème.

Rappel de la méthode : on factorise la totalité du polynôme.
Si ça ne tombe pas juste, on « fait » une fraction.

Pour vérifier les résultats, on peut utiliser un logiciel de calcul formel tel que XCas.
Sinon, on développe le résultat obtenu pour vérifier que l'on obtient bien l'expression de départ (« on développe et on vérifier que l'on retombe sur l'expression de départ).

1°) $f(x) = -(x-1)^2 + 5$

2°) $f(x) = 2\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}\right] = 2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{2}$

3°) $f(x) = (x+3)^2 - 9$

4°) $f(x) = \left(x-\sqrt{5}\right)^2 - 4$

N.B. : Il faut bien voir que ce sont des phrases quantifiées universellement de manière implicite (on peut néanmoins faire apparaître la quantification de manière explicite).

Solution détaillée :

1°) $$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x + 4 \\ &= -\left(x^2 - 2x - 4\right) \\ &= -\left(x^2 - 2x + 1 - 1 - 4\right) \\ &= -\left[(x-1)^2 - 5\right] \\ &= -(x-1)^2 + 5 \end{aligned}$$

2°) $$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 10x - 2 \\ &= 2\left(x^2 + 5x - 1\right) \\ &= 2\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - 1\right) \\ &= 2\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}\right] \\ &= 2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{2} \end{aligned}$$

3°) $$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x \\ &= x^2 + 6x + 9 - 9 \\ &= (x+3)^2 - 9 \end{aligned}$$

4°) $$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x\sqrt{5} + 1 \\ &= x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 - 5 + 1 \\ &= \left(x-\sqrt{5}\right)^2 - 4 \end{aligned}$$

$\boxed{13}$ **$f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2+1}$**

Déterminons l'ensemble de définition de f.

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 + 1 \neq 0$
si et seulement si $x^2 \neq -1$ (toujours vrai)

L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

Étudions le sens de variation de f sur [0 ; + ∞[.

On applique le principe de reconstruction de la fonction.

Soit u et v deux réels tels que $0 \leq u < v$.

$0 \leq u < v$
$0 \leq u^2 < v^2$ car deux réels strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
$1 \leq u^2 + 1 < v^2 + 1$ car ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.
$\frac{1}{u^2+1} > \frac{1}{v^2+1}$ car deux réels positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
$\frac{2}{u^2+1} > \frac{2}{v^2+1}$ car multiplier par un même nombre strictement positif chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

On obtient : $f(u) > f(v)$.
Donc **la fonction f est décroissante sur l'intervalle [0 ; + ∞[.**

Attention à ne pas confondre les mots « inégalités » et « inéquations ».
Ici, il s'agit d'inégalités et non d'inéquations.

$\boxed{14}$ **Technique mise en œuvre :** encadrements successifs (technique algorithmique).

On procède par encadrements successifs (ou par « incorporations » successives de termes).

On donnera la réponse sous la forme : .... $\leq \frac{1}{x-6} \leq$ .... (pas de phrase réponse à faire).

Solution détaillée :

$x \in [-2\ ;\ 5]$

Déterminons le meilleur encadrement possible de $\frac{1}{x-6}$.

On sait que $-2 \leq x \leq 5$.
Donc $-8 \leq x-6 \leq -1$
D'où $-\frac{1}{8} \geq \frac{1}{x-6} \geq -1$ (car la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.)

Les exercices $\boxed{15}$ à $\boxed{20}$ portent sur les **enchaînements de fonctions de référence**.
Ces exercices permettent de travailler la notion de variable.

$\boxed{15}$ **Enchaînement de deux fonctions de référence**

Il doit y avoir deux fonctions, les deux fonctions doivent être des fonctions de référence.

Cet exercice permet de revoir la notation de la flèche à talon (on fait une petite barre) : flèche « a pour image », différente de la flèche sans talon « à valeur dans ».
On verra que la flèche sans talon a d'autres significations : flèche « tend vers ».

Faire les flèches à la règle.

La flèche sert également à noter les vecteurs (flèches de vecteurs).

Cet exercice permet également de voir une démarche algorithmique (« c'est comme un algorithme »).

L'intérêt de cet exercice est de décomposer une fonction.
Cela peut servir à étudier les variations de la fonction.

1°) $f(x) = (3x)^2$

$$x \xmapsto{u} 3x$$

$$X \xmapsto{v} (X)^2$$

Les parenthèses en rouge sont facultatives.

On voit que c'est d'abord la fonction linéaire puis la fonction carré.

2°) $f(x) = 3x^2 - 1$

$$x \xmapsto{u} x^2$$

$$X \xmapsto{v} 3X - 1$$

On voit que c'est d'abord la fonction carré puis la fonction affine.

3°) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

$$x \longmapsto x-3$$

$$X \longmapsto \frac{1}{X}$$

On voit que c'est d'abord la fonction affine puis la fonction inverse.

Réécriture fausse : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$.

4°) $f(x) = \frac{4}{x} - 2$

On fait une réécriture : $f(x) = 4 \times \frac{1}{x} - 2$ (on écrit l'expression de f différemment).

$$x \xmapsto{u} \frac{1}{x}$$

$$X \xmapsto{v} 4X - 2$$

On voit que c'est d'abord la fonction inverse puis la fonction affine.

5°) $f(x) = (3x-1)^2$

$$x \xmapsto{u} 3x - 1$$

$$X \xmapsto{v} (X)^2$$

Ces parenthèses sont inutiles.

On voit que c'est d'abord la fonction affine puis la fonction carré.

$\boxed{16}$ $f : x \mapsto \dfrac{5x-1}{x}$

f est une **fonction homographique** (quotient de deux fonctions affines).

1°) **Vérifions que $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$.**

Écriture à l'aide du quantificateur $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{5x}{x} - \dfrac{1}{x} = 5 - \dfrac{1}{x}$ (principe de séparation des quotients).

Principe de séparation

2°) **Déduisons-en un enchaînement de fonctions de référence conduisant de x à $f(x)$.**

Utiliser le résultat du 1°) : la forme $f(x) = \dfrac{5x-1}{x}$ n'est pas utilisable.

$$x \xmapsto{\;u\;} \frac{1}{x}$$
$$X \xmapsto{\;v\;} 5 - X$$

f est l'enchaînement de u suivie de v.

$\boxed{17}$ On note f, g, h, i les fonctions définies par les enchaînements des questions 1°), 2°), 3°), 4°).

1°) $f(x) = -x^2 + 2$
2°) $g(x) = (-x+2)^2$
3°) $h(x) = x^2 - 2$
4°) $i(x) = (x-2)^2$

Pour tout réel x, on a : $g(x) = i(x)$ (en effet $\forall\, X \in \mathbb{R} \quad (-X)^2 = X^2$).
Les fonctions g et i sont égales.

$\boxed{18}$ On note u la fonction carré et v la fonction racine carrée.

f : enchaînement de u suivie de v

$$x \xmapsto{\;u\;} x^2$$
$$X \xmapsto{\;v\;} \sqrt{X}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{X} \text{ avec } X = x^2 \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \end{aligned}$$

La fonction f est la fonction valeur absolue.

$\boxed{19}$ **Enchaînement de 3 fonctions de référence**

$$x \xmapsto{\;u\;} x^2$$
$$X \xmapsto{\;v\;} X + 1$$
$$Y \xmapsto{\;w\;} \sqrt{Y}$$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

On ne peut pas simplifier (on ne peut pas séparer la racine à cause du +).

$\boxed{20}$ **Enchaînement de 3 fonctions de référence**

Attention : l'ordre est capital.

1°) $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$

$$x \xmapsto{\;u\;} x - 1$$
$$X \xmapsto{\;v\;} X^2$$
$$Y \xmapsto{\;w\;} 2Y - 5$$

La fonction f est l'enchaînement de la fonction $u : x \mapsto x - 1$ (fonction affine), suivie de la fonction $v : x \mapsto x^2$ (fonction « carré »), suivie de la fonction $w : x \mapsto 2x - 5$ (fonction affine).

2°) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^3$

$$x \xmapsto{\;u\;} x + 1$$
$$X \xmapsto{\;v\;} X^3$$
$$Y \xmapsto{\;w\;} \frac{1}{2}Y$$

La fonction f est l'enchaînement de la fonction $u : x \mapsto x + 1$ (fonction affine), suivie de la fonction $v : x \mapsto x^3$ (fonction cube), suivie de la fonction $w : x \mapsto \dfrac{1}{2}x$ (fonction linéaire).

3°) $f(x)=1-\dfrac{3}{x+2}$

$$x \xmapsto{u} x+2$$

$$X \xmapsto{v} \frac{1}{X}$$

$$Y \xmapsto{w} 1-3Y$$

La fonction f est l'enchaînement de la fonction $u : x \mapsto x + 2$ (fonction affine), suivie de la fonction $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (fonction « inverse »), suivie de la fonction $w : x \mapsto 1 - 3x$ (fonction affine).