1ère S

Utilisation des fonctions de référence

I. Règles d'ordre

1°) Quelques règles de rangement (déduites du sens de variation)

a et b sont deux réels.

Rangements de deux carrés

- Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$.
- Si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \geqslant b^2$.

Rangement de deux cubes

Si $a \leqslant b$, alors $a^3 \leqslant b^3$.

Rangement de deux inverses

- Si $0 < a \leqslant b$, alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.
- Si $a \leqslant b < 0$, alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.

Rangement de deux racines carrées

Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

2°) Signe de $ax + b$ où a et b sont deux réels ($a \neq 0$)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe contraire de a	0	Signe de a	

1er cas : $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		–	0	+	

2e cas : $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		+	0	–	

Application aux tableaux de signes (voir exercices).

3°) Méthode des inégalités successives

On utilise les règles de comparaison pour déterminer des encadrements par exemple ou pour établir le sens de variation d'une fonction (voir exercices).

II. Équations et inéquations de base liées à la fonction « carré »

1°) Règle

a est un réel strictement positif fixé.

$x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

$x^2 \leqslant a$ équivaut à $-\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}$.

$x^2 \geqslant a$ équivaut à $x \leqslant -\sqrt{a}$ ou $x \geqslant \sqrt{a}$.

2 approches possibles : algébrique ou graphique.

2°) Rappel de la définition de la racine carrée d'un réel

a est un réel positif ou nul.
La racine carrée de a est l'unique réel x positif ou nul tel que $x^2 = a$.
Ce réel est noté $\sqrt{a}$.

Par exemple, la racine carrée de 9 est 3 ($\sqrt{9} = 3$).

III. Fonctions usuelles

Il s'agit de fonctions que l'on va beaucoup étudier cette année.

1°) Fonctions polynômes

$x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) : fonction polynôme du second degré.
$x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$): fonction polynôme du 3e degré.
$x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$) : fonction polynôme du 4e degré.
(a, b, c … sont les **coefficients** de la fonction polynôme.)

2°) Fonctions rationnelles

Définition :

Une fonction rationnelle est une fonction dont l'expression peut s'écrire comme quotient de deux fonctions polynômes.

Exemples :

$f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-5}{x-2}$

$f : x \mapsto x+\dfrac{1}{x}$ (on peut écrire $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$)

3°) Cas particulier de fonction rationnelle : les fonctions homographiques

Définition :

Une fonction homographique est une fonction qui peut s'écrire comme quotient de deux fonctions affines.

$f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

4°) N.B.

Cette année nous étudierons surtout des fonctions polynômes (de degré inférieur ou égal à 4) et des fonctions rationnelles.

IV. Forme canonique d'un polynôme du second degré

Objectif : étudier une nouvelle technique algébrique pour les fonctions polynôme du second degré

1°) Exemple 1

$f(x)=\underbrace{\boxed{x^2 \quad + \quad 6x} \quad + \quad 5}_{\text{expression développée réduite ordonnée}}$

Réécriture (2/3 d'identité remarquable : nous avons un terme carré et un terme rectangle ; il manque un terme carré $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$)

$f(x)=\boxed{x^2+\ 6x+9}-9+5$

$\downarrow$ Identité remarquable (factorisation)

$\boxed{f(x)=(x+3)^2-4}$

Forme canonique de $f(x)$ (la variable x apparaît à un seul endroit)

Utilisation possible : obtenir une factorisation de $f(x)$.

2°) Exemple 2

$f(x)=4x^2-8x+3$

$f(x)=4\underbrace{\left(x^2-2x+\dfrac{3}{4}\right)}$

On travaille sur ce polynôme.

$f(x)=4\left[\boxed{x^2-2x+1}-1+\dfrac{3}{4}\right]$

$\downarrow$ identité remarquable

$f(x)=4\left[(x-1)^2-\dfrac{1}{4}\right]$

$\boxed{f(x)=4(x-1)^2-1}$

3°) Règle (admise provisoirement)

Tout polynôme du second degré du type ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ s'écrit sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ appelée **« forme canonique »**.

Dans la forme canonique, la variable n'apparaît qu'à un seul endroit.

4°) Technique pour la canonisation d'une expression du second degré

Retenir la démarche pour « canoniser » (ou pour effectuer la « canonisation » d') une expression polynôme du second degré : on met en facteur la totalité de l'expression par le coefficient du terme de degré 2 ; on utilise éventuellement des fractions.

V. Exemples de recherche d'ensembles de définition

1°) Deux types de problèmes

- Un dénominateur n'est jamais nul.
- Un radicande (ce qui figure sous un radical) est toujours positif ou nul.

Pour déterminer l'ensemble de définition, on analyse les types de problèmes qui se posent.

Le radical est le symbole qui sert à noter une racine carrée $\sqrt{\ }$.

2°) Exemples

• Exemple 1

$f : x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2+x}$

$f(x)$ existe si et seulement si le dénominateur est non nul

si et seulement si $x^2+x \neq 0$

si et seulement si $x(x+1) \neq 0$

si et seulement si $x \neq 0$ **et** $x+1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 0$ **et** $x \neq -1$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0;-1\}$

• Exemple 2

$f : x \mapsto \sqrt{x-2}$

$f(x)$ existe si et seulement si le radicande est positif ou nul

si et seulement si $x-2 \geqslant 0$ (traduction en langage mathématique)

si et seulement si $x \geqslant 2$

$\boldsymbol{D}_f = [2\,;+\infty[$

• Exemple 3

$f : x \mapsto \dfrac{3}{x-5} - \dfrac{2x}{x+1}$

$f(x)$ existe si et seulement si les deux dénominateurs sont non nuls

si et seulement si $x-5 \neq 0$ et $x+1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 5$ et $x \neq -1$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;5\}$

• Exemple 4

$f : x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$

$f(x)$ existe si et seulement si les deux radicandes sont positifs ou nuls

si et seulement si $\begin{cases} 1-x \geqslant 0 \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases}$ (l'accolade signifie **« et »**)

si et seulement si $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant -3 \end{cases}$

$\boldsymbol{D}_f = [-3\,;1]$

3°) Rédaction-type

« $f(x)$ existe si et seulement si ….

si et seulement si … »

Ne pas écrire « *f* existe si et seulement si ….

si et seulement si … »

La fonction *f* existe toujours.

4°) Remarques

• Quand on doit déterminer l'ensemble de définition d'une fonction, on doit analyser les types de problèmes qui se posent.

Il peut y avoir parfois plusieurs conditions d'existence ; dans ce cas, on obtient un système $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ (comprenant autant de lignes que de conditions).

• Une règle importante

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction on ne doit pas transformer l'écriture de $f(x)$.

En revanche, lorsque l'on a déterminé l'ensemble de définition de la fonction il est possible de transformer l'expression de la fonction.

• Une expression usuelle : qu'appelle-t-on « intervalles qui constituent $\boldsymbol{D}_f$ » ?

Lorsque $\boldsymbol{D}_f$ est la réunion de plusieurs intervalles, ces intervalles s'appellent « intervalles qui constituent $\boldsymbol{D}_f$ ».

VI. Enchaînements (ou « montages ») de fonctions de référence

1°) Exemple 1

$f : x \mapsto (x+1)^2$

$x \overset{u}{\mapsto} \underbrace{x+1}_{X}$

$X \overset{v}{\mapsto} X^2$

On pose : $u(x) = x+1$ et $v(x) = x^2$ (*u* est une fonction affine, *v* est la fonction « carré »).

f est l'enchaînement « *u* suivie *v* ».

2°) Exemple 2

$f : x \mapsto \dfrac{2}{x-1} + 3$

$x \overset{u}{\mapsto} \underbrace{x-1}_{X}$

$X \overset{v}{\mapsto} \underbrace{\dfrac{1}{X}}_{Y}$

$Y \overset{w}{\mapsto} 2Y+3$

On pose $u(x) = x-1$, $v(x) = \dfrac{1}{x}$, $w(x) = 2x+3$.
f est l'enchaînement de *u* suivie de *v* suivie de *w*.

VII. Appendice

1°) Confusions à éviter

4 « trucs » à ne pas confondre sur les fonctions

f
la fonction
expression
variation (croissante, décroissante)
extremum (minimum, maximum)
ensemble de définition
(*f* est définie sur …. ; *f* est définie en … ;
f n'est pas définie en ….).

$f(x)$
l'image de *x* par *f*

$\mathcal{D}$
l'ensemble de définition

$\mathcal{C}_f$
la courbe de *f*
équation
point

On évitera de dire qu'une courbe est croissante ou décroissante.

Le mot « point » marche avec le mot « courbe » (puisqu'une courbe est un ensemble de points).

2°) La notion de variable

3°) La notion d'équation de courbe

C.N.S d'appartenance d'un point à la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction *f* :

« M(*x*, *y*) appartient à $\mathcal{C}$ » équivaut à « $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$ ».

Qu'appelle-t-on équation d'une courbe ?

Cas où $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Cas de plusieurs courbes *y* = et *y* = on utilise toujours les mêmes lettres *x* et *y*.
Utiliser le bon vocabulaire :
$y = x^2$ est une courbe (et non une droite)
$y = 2x + 1$ est une droite