1ère S

Fonctions de référence

Objectifs :
- Revoir et compléter l'étude des fonctions de référence vues en seconde.
- Signaler en particulier quelques propriétés géométriques de leurs courbes représentatives et relier ces propriétés à des propriétés algébriques des fonctions.
- Revoir diverses notions sur les fonctions (notations, vocabulaire, ensemble de définition, variations, courbes…) notamment en utilisant les 3 cadres habituels : algébrique-numérique, fonctionnel, géométrique-graphique.
- Revoir les techniques d'études du sens de variation d'une fonction.
- Revoir et compléter les connaissances d'algèbre sur les identités remarquables.

Préliminaire : rappels sur le sens de variation d'une fonction

1°) Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction croissante	*f* est croissante sur I signifie que pour tous réels *u* et *v* de I tels que $u \leqslant v$, $f(u) \leqslant f(v)$. *f* est strictement croissante sur I signifie que pour tous réels *u* et *v* de I tels que $u < v$, $f(u) < f(v)$.
Fonction décroissante	*f* est décroissante sur I signifie que pour tous réels *u* et *v* de I tels que $u \leqslant v$, $f(u) \geqslant f(v)$. *f* est strictement décroissante sur I signifie que pour tous réels *u* et *v* de I tels que $u < v$, $f(u) > f(v)$.
Fonction monotone	Une fonction est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

2°) Remarques

- Les définitions sont données sous formes de **phrases quantifiées** (« pour tous » …).
- On ne parle de fonctions croissantes ou décroissantes que **sur un intervalle**.
- **Les mots qui marchent ensemble :**

On doit toujours préciser **« fonction croissante sur … »**, **« fonction décroissante sur … »**, **« fonction monotone sur … »** **(et non pas croissante tout court)**.

3°) Comment étudier le sens de variation d'une fonction (pour mémoire)

Une méthode générale :

Pour étudier le sens de variation d'une fonction *f* sur un intervalle I, on prend deux réels quelconques *u* et *v* dans I tels que $u < v$; on compare $f(u)$ et $f(v)$ (par exemple, en utilisant la technique de la différence).

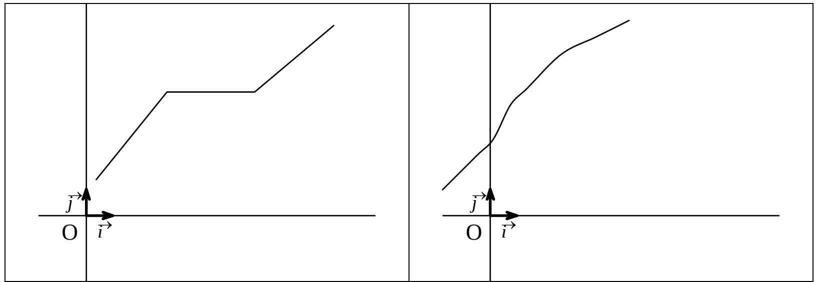
Cette méthode est difficile à mettre en œuvre pour certaines fonctions ; nous étudierons un bien meilleur moyen cette année.

4°) Tableau de variation (pour mémoire)

x	
Variations de *f*	

Lorsqu'une fonction n'est pas définie en un réel, on met une double barre.

5°) Différence entre fonction croissante et fonction strictement croissante



Fonction croissante	Fonction strictement croissante

I. Fonctions affines

1°) Définition

$f : x \mapsto ax + b$ (*a* et *b* coefficients réels)

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

2°) Cas particuliers

- $a = 0$ $f : x \mapsto b$ **fonction constante**
- $b = 0$ $f : x \mapsto ax$ **fonction linéaire**

3°) Tableau de variations ($a \neq 0$)

Le sens de variation de *f* est donné par le signe de *a*.

$\boxed{a>0}$			$\boxed{a<0}$		
x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$+\infty$
Var. de f	↗		Var. de f	↘	
f **est** **strictement croissante** **sur $\mathbb{R}$.**			***f*** **est** **strictement décroissante** **sur $\mathbb{R}$.**		

Principe de démonstration :

On prend deux réels quelconques u et v tels que $u<v$. On doit comparer $f(u)$ et $f(v)$.

On effectue la différence $f(u)-f(v)=au+b-(av+b)=au+\cancel{b}-av-\cancel{b}=au-av=a(u-v)$.

$u-v<0$ et on regarde le signe de a.

4°) Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax+b$ est la droite d'équation réduite

$$y=\boxed{\boldsymbol{a}}\,x+\boxed{\boldsymbol{b}}.$$

coefficient directeur
(pente si le repère est orthonormé)

ordonnée à l'origine

Tracé

ou
- 2 points
- 1 point et le coefficient directeur

5°) Formule du coefficient directeur

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{f(x_1)-f(x_2)}}{\boldsymbol{x_1-x_2}}\quad (x_1\neq x_2)}$$

II. La fonction « carré »

1°) Définition

$f : x \mapsto x^2$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$ (on peut calculer le carré de n'importe quel réel)

2°) Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var. de f		↘	0	↗	

f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.*

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0 ; il est obtenu pour $x=0$.

* f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; + ∞[et strictement décroissante sur l'intervalle]– ∞ ; 0].
On inclut 0 dans les deux intervalles.

Principe de démonstration pour le sens de variation sur $[0\,;+\infty[$:

On prend deux réels quelconques u et v dans $[0\,;+\infty[$ tels que $u<v$.

On effectue la différence $f(u)-f(v)=u^2-v^2=(u-v)(u+v)$.

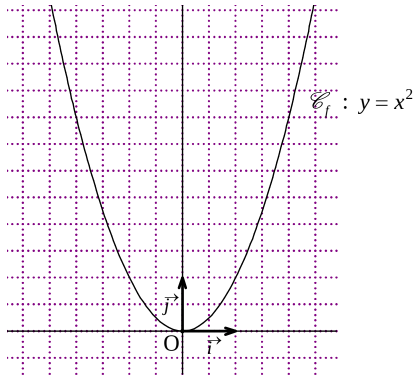
$u-v<0$ et $u+v>0$ donc $f(u)-f(v)<0$ soit $f(u)<f(v)$ d'où le résultat.

Même principe sur $]-\infty\,;0]$.

3°) Représentation graphique

(au moins 5 valeurs)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9



On devrait mettre des flèches pour montrer que la courbe conserve la même allure hors de la zone de la représentation.

$\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet O qui admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie dans un repère orthogonal.

La courbe prend une forme arrondie en O ; elle vient « coller » l'axes des abscisses autour du point O. On dit que $\mathscr{C}_f$ est tangente à l'axe des abscisses en O (nous reverrons cette notion plus tard).

4°) Justification de la symétrie

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-x)^2 = x^2$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$.

On dit que la fonction « carré » est **paire**.
On dit qu'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ est paire lorsque $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$.

Les points M et M′ d'abscisses respectives – *x* et *x* ont la même ordonnée et sont symétriques par rapport à (O*y*).

N.B. : Si le repère n'est pas orthogonal, on a une **symétrie oblique** d'axe (O*y*) de direction (O*x*).

III. La fonction « inverse »

1°) Définition

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (on ne peut pas calculer l'image de 0)

2°) Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var de f		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$.

Principe de démonstration pour le sens de variation sur $]0\,;+\infty[$:

On prend deux réels quelconques *u* et *v* dans $]0\,;+\infty[$ tels que $u < v$.

On effectue la différence $f(u) - f(v) = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = \dfrac{v-u}{uv}$.

$v - u > 0$ et $uv > 0$ donc $f(u) - f(v) > 0$ soit $f(u) > f(v)$ d'où le résultat.

Même principe sur $]-\infty\,;0[$.

Attention : la fonction « inverse » n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

En effet, prenons un contre-exemple.

$-1 \leqslant 2$

$f(-1) = -1$

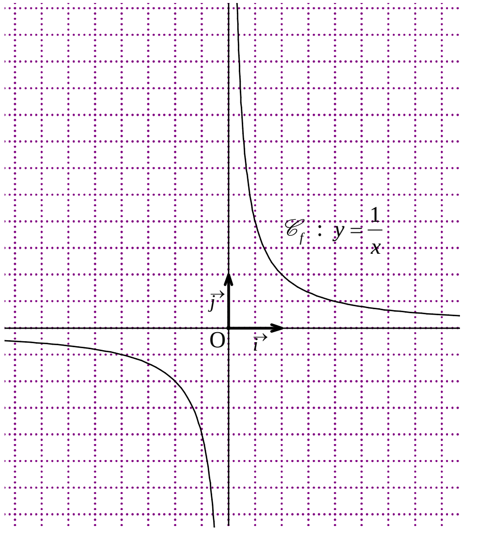
$f(2) = \dfrac{1}{2}$

On a : $f(-1) \leqslant f(2)$.

3°) Représentation graphique

6 valeurs

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	╳	2	1	$\frac{1}{2}$



On devrait mettre des flèches pour montrer que la courbe conserve la même allure hors de la zone de la représentation.

$\mathscr{C}_f$ est une hyperbole constituée de 2 branches symétriques par rapport à l'origine O du repère.

(La courbe est en deux morceaux ; on dit ici que la courbe de la fonction inverse est constituée de deux **branches**. On trace séparément ces deux branches sachant qu'elles sont symétriques par rapport à l'origine. On met le nom de la courbe seulement sur l'une des deux).

4°) Justification de la symétrie

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$ soit $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(-x) = -f(x)$.

On dit que la fonction « inverse » est **impaire**.
On dit qu'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ est impaire lorsque $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(-x) = -f(x)$.

Les points M et M′ d'abscisses respectives – x et x ont des ordonnées opposées et sont symétriques par rapport au point O.

IV. La fonction « cube »

1°) Définition

$f : x \mapsto x^3$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ (on peut calculer le cube de n'importe quel réel)

2°) Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var. de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

***f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

Démonstration pour le sens de variation sur [0 ; + ∞[:

On prend deux réels quelconques u et v dans $[0\,;+\infty[$ tels que $u < v$.

On sait que comme la fonction « carré » est croissante sur $[0\,;+\infty[$ on a : $u^2 < v^2$ (2).

Comme les inégalités (1) et (2) ne comportent que des nombres strictement positifs, on peut les multiplier membre à membre.

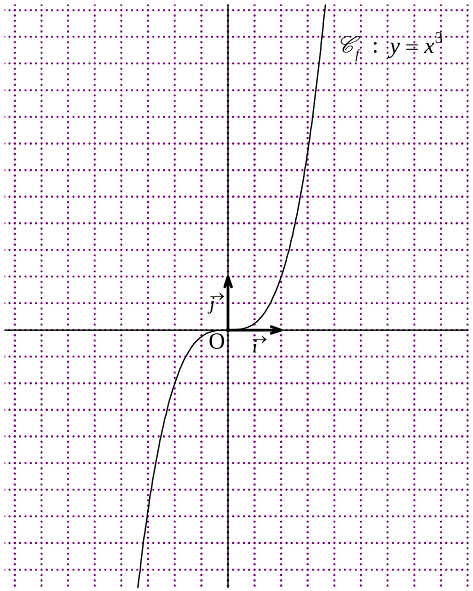
On obtient $u^3 < v^3$ soit $f(u) < f(v)$. Par suite, f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Même principe sur $]-\infty\,;0]$.

3°) Représentation graphique

(au moins 5 valeurs)

x	-2	-1	0	1	2
x^3	-8	-1	0	1	8



La courbe est symétrique par rapport à l'origine.

4°) Justification de la symétrie

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ (-x)^3 = -x^3$ soit $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(-x) = -f(x)$.

On dit que la fonction « cube » est **impaire**.
On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est impaire lorsque $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(-x) = -f(x)$.

Les points M et M' d'abscisses respectives – x et x ont des ordonnées opposées et sont symétriques par rapport à O.

V. La fonction « racine carrée »

1°) Définition

$f : x \mapsto \sqrt{x}$

$\mathscr{D}_f = [0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+$

(on peut calculer la racine carrée de n'importe quel nombre positif ou nul ; $\sqrt{0}$ existe et $\sqrt{0} = 0$)

Rappel de la définition de la racine carrée d'un réel positif ou nul :

La racine carrée d'un réel positif ou nul x est l'unique réel positif ou nul dont le carré est égal à x.

Exemples :

La racine carrée de 4 est égale à 2 : $\sqrt{4}=2$.
La racine carrée de 1 est égale à 1 : $\sqrt{1}=1$.
La racine carrée de 0 est égale à 0 : $\sqrt{0}=0$.
La racine carrée de – 1 n'existe pas.

2°) Tableau de variations

x	0		$+\infty$
Var. de f	0	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Le minimum de f sur $\mathbb{R}_+$ est 0 ; il est obtenu pour $x=0$.

Démonstration pour le sens de variation sur $[0\,;+\infty[$:

On prend deux réels quelconques u et v dans $[0\,;+\infty[$ tels que $u<v$.

On effectue la différence

$$f(u)-f(v)=\sqrt{u}-\sqrt{v}=\frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{1}=\frac{\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}=\frac{\left(\sqrt{u}\right)^2-\left(\sqrt{v}\right)^2}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}=\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ qui est la **quantité conjuguée** de $\sqrt{u}-\sqrt{v}$.
En général, on utilise plutôt ce genre de technique afin de se « débarrasser » d'une racine carrée au dénominateur. C'est le contraire que l'on fait ici : on met des racines carrées au dénominateur alors qu'il n'y en avait pas ; on complique l'écriture mais cela nous simplifie la recherche du signe de $f(u)-f(v)$.

On a : $u-v<0$ et $\sqrt{u}+\sqrt{v}>0$ donc $f(u)-f(v)<0$ soit $f(u)<f(v)$ d'où le résultat.

● **Une remarque pour commencer :**

On ne peut prendre 2 valeurs.
On est obligé de travailler en littéral.

● On prend 2 « valeurs » de x : u et v avec $u<v$, avec $u\in\mathbb{R}_+$ et $v\in\mathbb{R}_+$.
● On compare $f(u)$ et $f(v)$.

$f(u)=\sqrt{u}$

$f(v)=\sqrt{v}$

$$\begin{aligned}f(u)-f(v)&=\sqrt{u}-\sqrt{v}\\&=\frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{1}\times\frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}\quad\text{(on complique pour trouver le signe)}\\&=\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}\end{aligned}$$

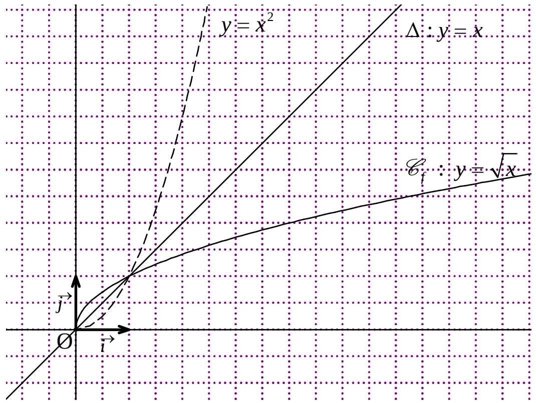
On analyse le signe de ce quotient : $u-v<0$ et $\sqrt{u}+\sqrt{v}>0$ donc $f(u)-f(v)<0$.
Par suite, $f(u)<f(v)$.

● Cette technique d'étude du sens de variation ne sera plus utilisée cette année. On aura d'autres techniques beaucoup plus efficaces.

3°) Représentation graphique

Au moins 4 points

x	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	1	2	3



Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on obtient $\mathscr{C}_f$ en utilisant la représentation de la fonction « carré » sur $\mathbb{R}_+$ et en utilisant la symétrie d'axe la 1ère bissectrice du repère (d'équation $y=x$).
$\mathscr{C}_f$ **est une <u>demi-parabole de sommet O</u>.**

La courbe $\mathscr{C}_f$ est « collée » à l'axe des ordonnées au voisinage du point O (elle « part verticalement » à partir du point O). On dit que $\mathscr{C}_f$ est **tangente** à l'axe des ordonnées au point O.

VI. La fonction « valeur absolue »

1°) Définition

$f : x \mapsto |x|$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

2°) Représentation graphique

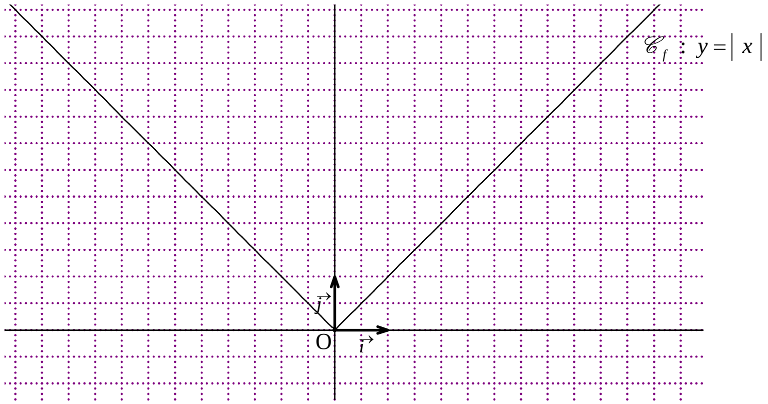
On trace les droites

$\Delta : y = x$

x	0	4
y	0	4

$\Delta' : y = -x$

x	0	-4
y	0	4



$\mathscr{C}_f$ **est la réunion de deux demi-droites fermées d'origine O** (V de valeur absolue).

La fonction « valeur absolue » est une fonction « affine par intervalles ».

$\mathscr{C}_f$ **est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

Sur la calculatrice, touche Abs sur le clavier ; sinon, sur certaines calculatrices, aller dans le catalogue.

3°) Justification de la symétrie

$\forall x \in \mathbb{R} \;\; |-x| = |x|$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(-x) = f(x)$.

On dit que la fonction « valeur absolue » est **paire**.

Les points M et M′ d'abscisses respectives – x et x ont la même ordonnée et sont symétriques par rapport à (Oy).

VII. Comparaison d'un réel strictement positif avec son carré, son cube, sa racine carrée

Il s'agit de comparer x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$ où x est un réel strictement positif.

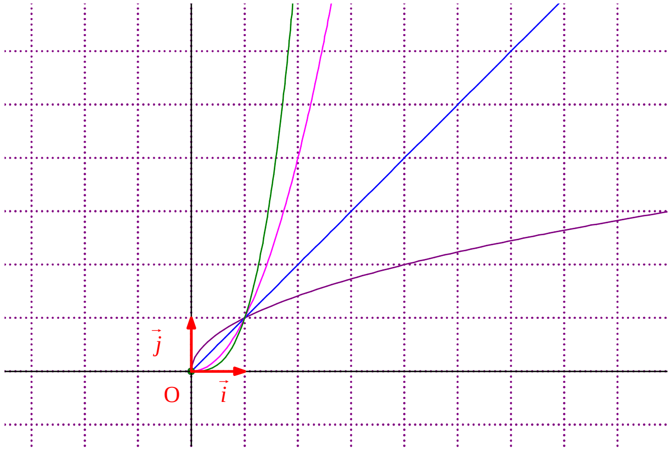
1°) Propriété

***x* est un réel quelconque strictement positif.**

- **Si $0 < x < 1$, alors $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.**
- **Si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.**
- **Si $x = 1$, alors $\sqrt{x} = x = x^2 = x^3$.**

2°) Illustration graphique

Sur un même graphique, on représente les courbes représentatives des fonctions « carré », « cube », « racine carrée » ainsi que la droite d'équation $y = x$ (pour $x \geqslant 0$).



On observe alors les **positions relatives** de ces courbes sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ c'est-à-dire que l'on cherche comment elles se positionnent les unes par rapport aux autres.

Pour décrire la position d'une courbe par rapport à une autre, on utilise un langage concret « proche » du langage courant en utilisant les mots « au-dessus », « au-dessous », « sécants ».

Par contre, on bannit les mots « inférieure » et « supérieure » (qui restent attachés au cadre algébrique-numérique).

3°) Démonstration algébrique

Méthode

On est obligé de faire une démonstration générale.
Un, deux, trois, …, mille exemples ou plus ne suffisent pas pour démontrer la propriété. Il s'agit d'une proposition quantifiée universellement valable pour tout réel x strictement positif.

Lorsque $x \neq 1$, on va démontrer les inégalités successivement dans chaque cas. Par exemple lorsque, $0 < x < 1$, on va démontrer que $x^3 < x^2$, puis $x^2 < x$ et enfin $x < \sqrt{x}$ (peu importe l'ordre).

1er cas : $0 < x < 1$ (1)

(1) donne $\sqrt{x} < \sqrt{1}$ (en appliquant la fonction « racine carrée » à chaque membre de l'inégalité, le sens de l'inégalité est conservé car la fonction « racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$) soit $\sqrt{x} < 1$.

On notera l'expression « en appliquant la fonction "racine carrée" … ». On pourrait être tenté de dire « en multipliant par la fonction "racine carrée" les deux membres de l'inégalité » ce qui serait faux. C'est bien le verbe « appliquer » qui convient ici.

On peut multiplier les deux membres de l'inégalité par $\sqrt{x}$. On obtient alors $x < \sqrt{x}$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité (1) par x ($x > 0$), on obtient $x^2 < x$.
En multipliant les deux membres de l'inégalité (1) par x^2 ($x^2 > 0$), on obtient $x^3 < x^2$.
Finalement, on peut écrire $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

On aurait aussi pu démontrer d'abord que $x^3 < x^2$, puis que $x^2 < x$ et enfin que $x < \sqrt{x}$ en appliquant la fonction « racine carrée » aux deux membres de l'inégalité précédente.

2^{e} cas : $x > 1$ (2)

On procède de la même manière que dans le 1er cas.

3^{e} cas : $x = 1$ (3)

Ce cas est évident.

VIII. Appendice 1 : identités remarquables

1°) Identités du second degré

a et *b* sont des réels quelconques.

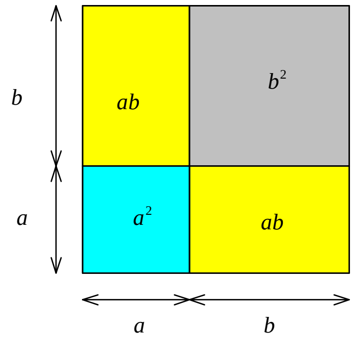
$$(a+b)^2 = a^2 + \boxed{2ab} + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - \boxed{2ab} + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

termes rectangles

N.B. :

Dans les deux premières identités remarquables, on parle de
- termes carrés ;
- doubles produits ou de termes rectangles.

Ces termes peuvent s'expliquer par l'illustration graphique des identités remarquables par les aires dans un carré. Chaque terme apparaît comme l'aire d'un rectangle ou d'un carré comme le montre la figure ci-dessous qui reprend celle de la double distributivité.



a, *b*, *c* sont des réels quelconques.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \boxed{2ab + 2bc + 2ca}$$

Démonstration :

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$$

On développe et on réduit.

2°) Identités du troisième degré

a et b sont des réels quelconques.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

3°) Démonstrations

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 \cancel{-ab} \cancel{+ab} - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3\\ &= a^3 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

N.B. :

$$(a-b)^3 = [a + (-b)]^3$$
$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3$$

4°) Utilisation

Développements et factorisations.

Exemple 1 :

Développer l'expression $\mathrm{A} = (2x+1)^3$.

On applique l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Le « rôle » de a est joué par $2x$; le « rôle » de b est « joué par 1.

$$\mathrm{A} = (2x)^3 + 3(2x)^2 \times 1 + 3 \times 2x \times 1^2 + 1^3$$
$$\mathrm{A} = 27x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

Exemple 2 :

Factoriser l'expression $\mathrm{B} = x^3 - 8$.

On effectue la réécriture $\mathrm{B} = x^3 - 2^3$.
On applique l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
Le « rôle » de a est joué par x ; le « rôle » de b est « joué par 2.

$$\mathrm{B} = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

D'autres exemples seront donnés en exercices.

5°) Complément : le triangle de Pascal

1						
1	+ 1					
1	+ 2	+ 1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

On doit retenir les identités remarquables jusqu'au cube.
À partir de l'exposant 4, on utilise le triangle de Pascal.

Exemple :

Pour développer $(a+b)^5$, on utilise la ligne du triangle de Pascal avec les coefficients :

1 5 10 10 5 1

Les monômes qui constituent le développement sont dans l'ordre des puissances décroissantes de *a* et croissantes de *b* :

a^5b^0 a^4b^1 a^3b^2 a^2b^3 a^1b^4 b^5

Or $b^0=1$ et $b^1=b$.

On écrit le développement cherché en prenant les monômes dans l'ordre affectés des coefficients trouvés dans le triangle de Pascal.

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Il faut bien avoir conscience que l'on ne peut pas aller plus loin dans le développement de $(a+b)^5$.

De manière générale, pour déterminer le développement de $(a+b)^n$ où *n* est un entier naturel donné, il y a deux choses à faire.

1ère travail : écrire les monômes du développement dans l'ordre décroissant des puissances de *a* et croissant des puissances de *b*. en laissant des espaces pour les coefficients.

$$(a+b)^n=\ldots a^nb^0+\ldots a^{n-1}b^1+\ldots a^{n-2}b^2+\ \ldots\ +\ldots a^0b^n$$

2e travail : lire sur la ligne *n* du triangle de Pascal les coefficients du développement et compléter l'égalité précédente.

On retiendra en outre que le développement de $(a+b)^n$ ne s'obtient pas en écrivant a^n puis b^n sous la forme d'une somme. Autrement dit, $(a+b)^n$ n'est pas égal à a^n+b^n.

IX. Appendice 2 : racine cubique d'un réel positif ou nul

1°) Définition

a est un réel positif ou nul.
Nous admettrons qu'il existe un unique réel *x* positif ou nul tel que $x^3=a$.
Ce réel est appelé **la racine cubique** de *a*.
Ce réel est noté $\sqrt[3]{a}$.

2°) Exemple

$$\sqrt[3]{8}=2 \text{ car } \begin{cases} 2^3=8 \\ 2\geqslant 0 \end{cases}$$

3°) Utilisation de la calculatrice

On peut déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ à l'aide de la calculatrice.

- **Sur TI,** pour calculer $\sqrt[3]{2}$, il y a deux méthodes :

$\boxed{\text{math}}$ → MATH 4

ou

2 $\boxed{\wedge}$ (1 : 3) $\boxed{\text{EXE}}$

- **Sur CASIO Graph 35+,** on a une touche $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$: pour cela, faire $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\wedge}$.

On peut démontrer que $\sqrt[3]{2}$ est un nombre irrationnel (c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire sous la forme $\dfrac{x}{y}$ où *x* et *y* sont deux entiers naturels).