1ère S — Exercices sur les fonctions de référence

1 Déterminer par le calcul les nombres qui sont confondus avec leur image par la fonction « carré ».

2 Déterminer par le calcul les nombres qui sont confondus avec leur image par la fonction « inverse ».

3 Donner sans explication l'ensemble des solutions S de l'inéquation $x^2 \geqslant 9$.

4 Dans le plan muni d'un repère quelconque $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction « inverse ».
Soit a et b deux réels quelconques non nuls. On note A, B, C, D les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a, b, $-a$ et $-b$.
Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

5 On note f la fonction « carré ».
La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

P : « Pour tous réels a et b, on a : $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$. »

Cette propriété reste-t-elle valable pour les autres fonctions de référence en prenant a et b dans le domaine de définition de la fonction de référence considérée ?

6 Comparer sans calcul les nombres $\pi - 3$, $(\pi - 3)^2$ et $(\pi - 3)^3$. Justifier.

7 Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse. Justifier.

P : « Le carré d'un réel positif ou nul est toujours supérieur ou égal à ce nombre ».

8 Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

A : « Si $x \geqslant -1$, alors $x^2 \geqslant 1$. »

B : « Si $x < -1$, alors $-1 < \dfrac{1}{x} < 0$. »

9 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction « inverse ».
Déterminer et tracer les axes de symétrie de $\mathcal{C}$ (on prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique). Aucune justification n'est demandée.

10 Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = x^2$ et D la droite d'équation $y = 2x$.
Faire un graphique sur une demi-page en prenant le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthonormé avec un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et D.

Rappel : Le tracé de $\mathcal{C}$ s'effectue à la main après avoir éventuellement rempli un petit tableau de valeurs.

Le but de l'exercice est d'étudier la **position relative*** de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite
Le but de l'exercice est d'étudier la **position relative*** de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite D c'est-à-dire que l'on cherche à savoir sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D, sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D et en quel(s) point(s) $\mathcal{C}$ et D sont sécantes.

Souvent, il est important de connaître la position d'une courbe par rapport à une droite ou à une autre courbe.

1°) **Étude graphique**

Étudier graphiquement la position relative de $\mathcal{C}$ et D.

On rédigera sur le modèle suivant en employant les mots « au-dessus », « au-dessus », « sécantes » :

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D sur …………… .
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D sur …………… .
- $\mathcal{C}$ et D sont sécantes aux points d'abscisses ……. .

2°) **Étude algébrique**

Étudier le signe de la différence $x^2 - 2x$ au moyen d'un tableau de signes et retrouver les résultats du 1°). On observera que l'on peut factoriser $x^2 - 2x = x(x-2)$.

* L'expression *position relative* a plusieurs sens en géométrie plane : pour des droites, il s'agit de savoir si elles sont sécantes ou parallèles ; pour une droite et un cercle, il s'agit de savoir s'ils sont sans points communs, s'ils ont un point commun (on dit que le cercle et la droite sont tangents), s'ils ont deux points communs (on dit que le cercle et la droite sont sécants) ; pour deux cercles, il s'agit également de déterminer leur intersection (il y a plusieurs cas possibles : intérieurs, extérieurs, tangents intérieurement, tangents extérieurement).
Dans le plan muni d'un repère, le sens est un peu différent pour une courbe et une droite ou pour deux courbes.
C'est parce que l'on a un repère que l'on peut dire « au-dessus » ou « au-dessous ».

La notion de position relative de deux courbes de fonctions ou d'une courbe de fonction et d'une droite a été abordée succinctement en 2e lors la résolution graphique d'inéquations (« les solutions sont les abscisses des points de … situés strictement au-dessus de la droite d'équation $y = ...$»).
Mais elle n'a pas été étudiée en tant que telle par des méthodes algébriques comme cela est fait dans cet exercice.

On retiendra la définition suivante :

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D c'est déterminer :
- le (ou les) intervalle(s) sur lequel (ou sur lesquels) $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D.
- le (ou les) intervalle(s) sur lequel (ou sur lesquels) $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D.
- le (ou les) point(s) d'intersection $\mathcal{C}$ et D.

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=x+1 \text{ si } x<2 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}x+5 \text{ si } x\geqslant 2 \end{cases}$.

Il s'agit d'une seule fonction définie par deux expressions différentes suivant que $x<2$ ou $x\geqslant 2$.

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (prendre le centimètre pour unité de longueur), tracer au crayon en pointillés les droites D et D' d'équations respectives $y=x+1$ et $y=-\dfrac{1}{2}x+5$. Faire un tableau de valeurs pour chacune des deux droites (deux valeurs de x et les valeurs de y correspondantes).

2°) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f sur le graphique précédent. On marquera précisément les points d'arrêt.

12 Tracer, sans explication, la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction « valeur absolue », notée f, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On prendra 1 centimètre ou 1 « gros » carreau pour unité de longueur.

Résoudre graphiquement (en expliquant) :

- l'équation : $|x|=2$ (1) ;
- les inéquations : $|x|\leqslant 3$ (2) et $|x|>1$ (3).

On notera S_1, S_2, S_3 les ensembles de solutions respectifs de (1), (2), (3).

13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ pour $x<1$ et $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pour $x\geqslant 1$.

La fonction f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par deux expressions différentes sur les intervalles $\left]-\infty\,;1\right[$ et $\left[1\,;+\infty\right[$.

Il s'agit bien d'une seule fonction définie par deux expressions différentes.

Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On prendra 1 centimètre ou 1 « gros » carreau pour unité de longueur.

Aucune explication ni aucun tableau de valeurs n'est demandé.

14 On considère la fonction f définie par $f(x)=|x-3|$.

1°) Exprimer $f(x)$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x.

2°) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On prendra 1 centimètre ou 1 « gros » carreau pour unité de longueur.

15 Développer $(2x+1)^3$ et $(x-3)^3$.

16 Factoriser x^3-1 et $8x^3+1$.

17 Mettre x^6-1 sous la forme d'un produit de quatre facteurs.

18 Développer et réduire l'expression $\text{A}=(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2$.

19 Soit a et b deux réels non nuls. Démontrer que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2=\dfrac{(a-b)^2}{ab}$.

Corrigé

1 Déterminons par le calcul les nombres qui sont confondus avec leur image par la fonction « carré ».

La difficulté est de savoir traduire correctement la question.

On rappelle que la fonction « carré » est la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

On cherche les réels x tels que $x = x^2$ (1).
(1) est successivement équivalente à :
$x - x^2 = 0$
$x \times 1 - x \times x = 0$
$x(1-x) = 0$ (équation produit-nul)
$x = 0$ ou $1 - x = 0$
$x = 0$ ou $x = 1$

Conclusion : **Les nombres qui sont confondus avec leur image par la fonction « carré » sont 0 et 1.**

Il faut penser à conclure par une phrase par rapport à la question posée.

Complément :

On peut retrouver graphiquement la réponse à la question posée.
On trace la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère (c'est une parabole de sommet l'origine) ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

Faire un graphique.

Il y a deux points d'intersection d'abscisses 0 et 1.

2 Déterminons par le calcul les nombres qui sont confondus avec leur image par la fonction « inverse ».

Comme dans l'exercice précédent, la difficulté est de savoir traduire correctement la question.

On rappelle que la fonction « inverse » est la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On cherche les réels $x \neq 0$ tels que $x = \dfrac{1}{x}$ (1).

Dans $\mathbb{R}^*$, (1) est successivement équivalente à :

$x^2 = 1$ (on effectue le produit en croix)
$x = 1$ ou $x = -1$

Conclusion : **Les nombres qui sont confondus avec leur image par la fonction « inverse » sont 1 et – 1.**

Complément :

On peut retrouver graphiquement la réponse à la question posée.
On trace la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère (c'est une hyperbole) ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

Faire un graphique.

Il y a deux points d'intersection d'abscisses – 1 et 1.

3

Donnons sans explication l'ensemble des solutions *S* de l'inéquation $x^2 \geqslant 9$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 9$ est $\boldsymbol{S =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[}$.

On peut s'appuyer sur la représentation graphique de la fonction carrée ou bien résoudre l'inéquation par le calcul.

Voici un exemple de résolution algébrique qui est faux :

$x^2 \geqslant 9$
$\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{9}$
$x \geqslant 3$ *
$S = [3\,;+\infty[$
* La faute se situe ici : il faut écrire $|x| \geqslant 3$ car $\sqrt{x^2} = |x|$.

4

$\mathcal{C}$: courbe représentative de la fonction « inverse »

$(a\,;b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$

A, B, C, D : points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a, b, $-a$ et $-b$.

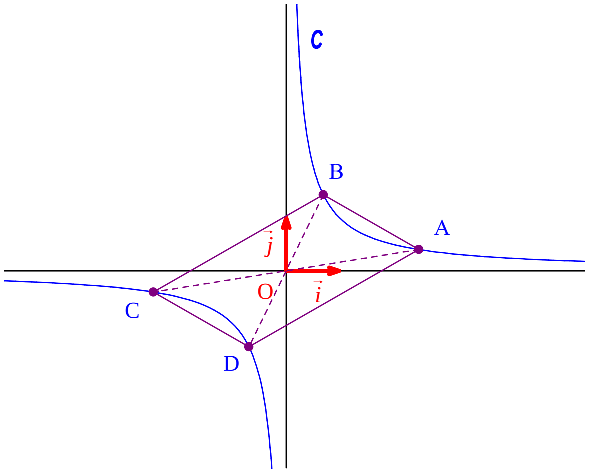
Déterminons la nature du quadrilatère ABCD.

Graphique :

On prend un repère orthonormé.

On prend 1 cm ou 1 « gros » carreau pour unité de longueur.

On commence par tracer la courbe $\mathcal{C}$.



On va utiliser la symétrie de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport au point O : O est un centre de symétrie de la courbe (on peut démontrer que c'est le seul).

La courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction « inverse » donc, d'après le cours, c'est une hyperbole admettant l'origine du repère pour centre de symétrie.

A et C appartiennent à $\mathcal{C}$ et ont pour abscisses respectives a et $-a$.
Donc A et C sont symétriques par rapport à O.
De même, B et D appartiennent à $\mathcal{C}$ et ont pour abscisses respectives b et $-b$.
Donc B et D sont symétriques par rapport à O.
Or si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
On en déduit que **ABCD est un parallélogramme**.

$\boxed{5}$ Logique ; phrases quantifiées

$f : x \mapsto x^2$

P : « Pour tous réels *a* et *b*, on a : $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$. »

Il s'agit d'une proposition quantifiée (avec le « pour tous »).

Cette proposition est **vraie**.

En effet, pour tous réels *a* et *b*, on a :
$$\begin{aligned} f(a \times b) &= (a \times b)^2 \\ &= a^2 \times b^2 \\ &= f(a) \times f(b) \end{aligned}$$

N.B. : ne pas prendre d'exemple

Cette propriété reste valable pour les autres fonctions de référence (fonction « inverse », fonction « cube », fonction « racine carrée », fonction « valeur absolue »), en prenant *a* et *b* dans le domaine de définition de la fonction de référence considérée. La démonstration est identique à celle de la fonction « carré ».

Le 3-10-2013

$f(a \times b) = f(a) \times f(b)$
On passe d'une écriture algébrique à une écriture fonctionnelle.

$\boxed{6}$ Comparons sans calcul les nombres $\pi - 3$, $(\pi - 3)^2$ et $(\pi - 3)^3$.

On utilise la règle du cours :

Soit *a* un réel strictement positif.

Si $0 < a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a}$.

Si $a > 1$, alors $\sqrt{a} < a < a^2 < a^3$.

Si $a = 1$, alors $\sqrt{a} = a = a^2 = a^3 = 1$.

On a : $\pi - 3 = 0{,}1415926\ldots$ (c'est le seul calcul que l'on s'autorise à faire ; on n'a d'ailleurs pas besoin de le faire à la calculatrice, il suffit de voir que $0 < \pi - 3 < 1$).

Donc $0 < \pi - 3 < 1$.
Par suite, d'après la propriété du cours, on a : $\mathbf{(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2 < \pi - 3}$.

Solution fausse d'une élève notée le 26-10-2013 :

Les nombres $\pi - 3$, $(\pi - 3)^2$ et $(\pi - 3)^3$ font partie de la fonction $f : x \mapsto x^n$.

$\boxed{7}$ *P* : « Le carré d'un réel positif ou nul est toujours supérieur ou égal à ce nombre »

La proposition *P* est **fausse**.
En effet, on peut prendre comme contre-exemple le nombre $x = 0{,}5$.
Le carré de 0,5 est égal à 0,25.

Or $0,25 < 0,5$.

Remarques :

• La propriété P est fausse pour tous les réels compris dans l'intervalle $]0\,;1[$.

• La proposition P est vraie pour tous les entiers naturels.

Beaucoup d'élèves se sont interrogés et ont douté.
• pour tout réel x.
• pour tout entier naturel.

Solution d'une élève notée le 26-10-2013 :

Faux : $\frac{1}{4} > \left(\frac{1}{4}\right)^2$

8 Logique ; phrases conditionnelles (implications)

Il s'agit de phrase ouverte définies pour $x \in \mathbb{R}$.
En fait, chacune d'elles devrait être quantifiée universellement.

• A : « Si $x \geqslant -1$, alors $x^2 \geqslant 1$ »

La proposition A est **fausse**. On peut prendre $x = 0$ pour contre-exemple.

• B : « Si $x < -1$, alors $-1 < \frac{1}{x} < 0$ »

La proposition B est **vraie**.

On peut s'appuyer sur la représentation graphique de la fonction « inverse ».

On peut aussi faire un raisonnement algébrique comme suit.
Si $x < -1$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{-1}$ (car la fonction « inverse » est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$) ce qui donne $\frac{1}{x} > -1$ (1).

Si $x < -1$, alors x est négatif et donc $\frac{1}{x}$ l'est aussi. Par conséquent, $\frac{1}{x} < 0$ (2).

(1) et (2) donnent alors $-1 < \frac{1}{x} < 0$.

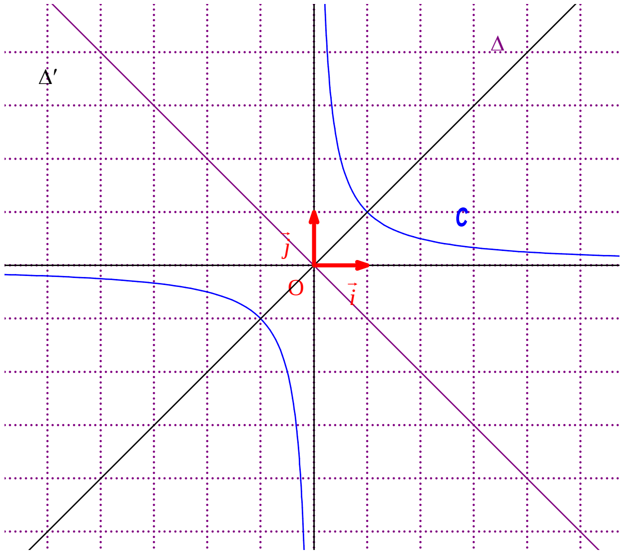
Solution fausse d'une élève notée le 26-10-2013 :

A : « Si $x \geqslant -1$, alors $x^2 \geqslant 1$ »
D'après la fonction « carré », $(-1)^2 = 1$.
Donc A est vraie.

B : « Si $x < -1$, alors $-1 < \frac{1}{x} < 0$ »
B est vraie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, **la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction « inverse » admet deux axes de symétrie : les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$** (on l'affirme sans le démontrer).
Ces droites s'appellent les bissectrices du repère (bien évidemment parce que le repère est orthonormé).



Solution fausse d'une élève notée le 26-10-2013 :

Les axes de $\mathcal{C}$ sont pour chaque x positif, son équivalent négatif.

La démonstration sera faite plus tard dans le cours sur le plan muni d'un repère orthonormé.

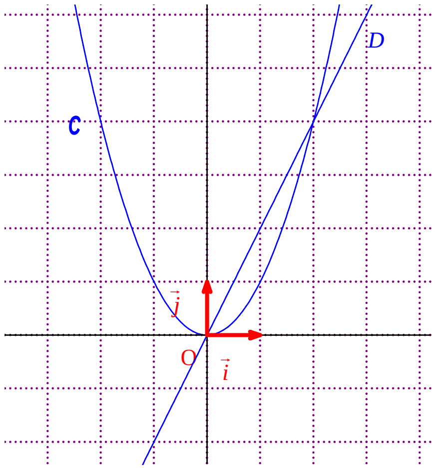
$\boxed{10}$ Position relative d'une courbe et d'une droite

$\mathcal{C}$: $y = x^2$

D : $y = 2x$

1°) **Étude graphique**

Étudions graphiquement la position relative de $\mathcal{C}$ et D.



On peut montrer avec des gestes la position relative (doigt sur la courbe).

Le 4 octobre 2016

Position relative d'une droite et d'une courbe :

On montre avec le doigt sur le tableau interactif.

$\mathcal{C}$ et D se coupent aux points d'abscisses 0 et 2 (on ne peut pas dire qu'elles se croisent).
On peut dire qu'elles se rencontrent.

- **Si $x \in \left]0\,;2\right[$, alors $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D.**
- **Si $x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$, alors $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D.**
- **$\mathcal{C}$ et D sont sécantes aux point d'abscisses 0 et 2.**

Ou :

- **$\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D sur $\left]0\,;2\right[$.**
- **$\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D sur $\left]-\infty\,;0\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$.**
- **$\mathcal{C}$ et D sont sécantes aux point d'abscisses 0 et 2.**

Bilan :

- On retiendra que pour la position des courbes, « c'est intervalle par intervalle ».
- On notera qu'il n'y a pas de symbole mathématique pour exprimer la position relative.
- On emploie le vocabulaire de tous les jours.
- On n'utilise pas les mots « supérieur » ou « inférieur » pour la position d'une courbe par rapport à une droite ; ces termes sont réservés aux réels. Il n'y a pas non plus de symbole pour dire « strictement au-dessus » ou « strictement au-dessous » (les symboles $<$ et $>$ sont réservés à des nombres, ils ne peuvent être employés pour des courbes).

Remarque de vocabulaire :

On peut aussi dire que $\mathcal{C}$ et D se « coupent » aux points d'abscisses 0 et 2 (mais il ne faut jamais dire « se croisent »).

2°) **Étude algébrique**

Étudions algébriquement la position relative de $\mathcal{C}$ et D.

C'est bien évidemment cette question qui est la plus intéressante.

On a : $x^2 - 2x = x(x-2)$.

Il faut noter que cette forme factorisée est essentielle pour pouvoir étudier le signe de l'expression $x^2 - 2x$.

On cherche les « valeurs charnières ».

On appelle « valeurs charnières » les valeurs pour lesquelles les facteurs s'annulent.

$x = 0$	$x - 2 = 0$ $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
SGN de x		$-$	0	$+$		$+$	

SGN de $x-2$	$-$		$-$	0	$+$
SGN de $x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Position de $\mathcal{C}$ par rapport à D	$\mathcal{C}$ est au-dessus de D	$\mathcal{C}$ et D sont sécantes au point d'absc. 0	$\mathcal{C}$ est au-dessous de D	$\mathcal{C}$ et D sont sécantes au point d'absc. 2	$\mathcal{C}$ est au-dessus de D

On peut dire « strictement au-dessus », « strictement au-dessous ».

Remarque sur les locutions adverbiales : « en dessus » et « en dessous » qui ne prennent pas de trait d'union contrairement aux locutions « au-dessus » et « au-dessous ». Les locutions « en dessus » et « en dessous » ont un usage vieilli selon Wiktionnaire.

L'expression « position relative » s'applique aussi dans l'espace pour les droites, pour les plans, pour une droite et un plan, pour une sphère et un plan.

Le mot « relatif » : « relatif à … ».

On retiendra évidemment les deux approches pour étudier la position relative de deux courbes :

- approche graphique ;

- approche algébrique (avec tableau de signe)

Si on note f la fonction « carré », pour étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D, on étudie le signe de $f(x)-2x$ (on notera que l'on a parfaitement le droit d'écrire une telle expression).

En revanche, on n'a pas le droit d'écrire une expression telle que $f(x)-y$ car on ne saurait pas que y désigne $2x$.

Plus généralement, on retiendra que pour étudier algébriquement la position relative des courbes représentatives de deux fonctions f et g, on étudie le signe de la différence $f(x)-g(x)$ en tenant compte de l'ordre dans lequel on a écrit la différence pour formuler la position relative.

$\boxed{11}$ Étude d'une fonction affine par intervalles

$$\begin{cases} f(x)=x+1 \text{ si } x<2 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}x+5 \text{ si } x\geqslant 2 \end{cases}$$

La fonction f est une fonction affine par intervalles car son expression est affine sur chacun des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $[2\,;+\infty[$.

1°) $D:\ y=x+1$; $D':\ y=-\dfrac{1}{2}x+5$

Traçons D et D'.

Faire un tableau de valeurs pour chacune des deux droites (deux valeurs de x et les valeurs de y correspondantes).

Ne pas prendre trois valeurs de x pour les tracés de droites. Deux valeurs suffisent !

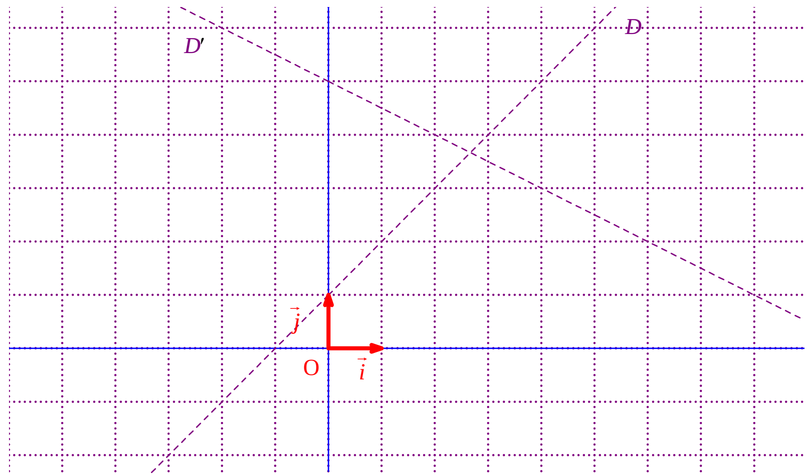
D :

x	0	4
y	1	5

D' :

x	0	4
y	5	3

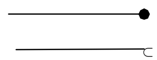
On trace les deux droites en pointillés.



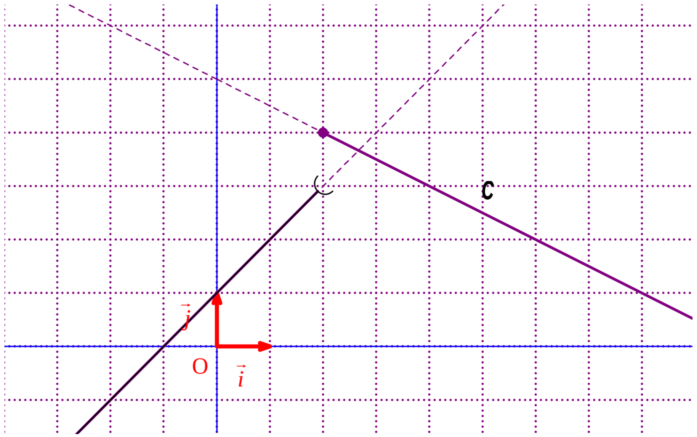
2°) **Traçons la représentation graphique de f.**

Les points d'arrêt sont $A(2\,;3)$ et $B(2\,;4)$.

Mettre les pointillés avec les coordonnées du point A puis les pointillés avec les coordonnées du point B.
Le point A est exclu ; le point B est compris.



La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion de deux demi-droites.
L'une est une demi-droite d'origine A privée du point A (on parle de « demi-droite ouverte ») ; l'autre est une demi-droite d'origine B (on parle de demi-droite fermée).



On marque 2 sur l'axe des abscisses.

La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion de deux demi-droites.

Remarque :

La première demi-droite qui correspond à la représentation graphique de la fonction sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$ est ouverte en A.
La seconde demi-droite qui correspond à la représentation graphique de la fonction sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ est fermée en B. Elle « prend » le relais de la première en ce point.

On doit mettre le nom de la représentation graphique : $\mathcal{C}$.

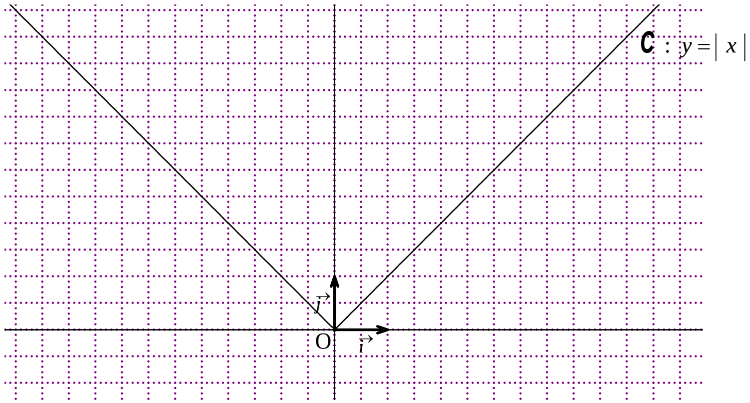
Définition :

Une *fonction définie par intervalles* est une fonction dont l'expression varie selon l'appartenance de *x* à l'un ou l'autre des intervalles disjoints dont la réunion est le domaine de définition de la fonction.

12 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

$f : x \mapsto |x|$

Cet exercice a pour seul intérêt d'utiliser la représentation graphique de la fonction « valeur absolue ».



$\mathcal{C}$ est la réunion de deux demi-droites fermées d'origine O.

• **Résolvons graphiquement l'équation $|x| = 2$ (1).**

L'équation (1) s'écrit $f(x) = 2$.
Les solutions de (1) sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ qui ont une ordonnée égale à 2 donc $S_1 = \{2\,;-2\}$.

• **Résolvons graphiquement l'équation $|x| \leqslant 3$ (2).**

L'inéquation (2) s'écrit $f(x) \leqslant 3$.
Les solutions de (2) sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ qui ont une ordonnée inférieure ou égale à 3* donc $S_2 = [-3\,;3]$.

• **Résolvons graphiquement l'équation $|x| > 1$ (3).**

L'inéquation (3) s'écrit $f(x) > 1$.
Les solutions de (3) sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ qui ont une ordonnée strictement supérieure à 1** donc $S_3 =]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

* Autre possibilité : « Les solutions de (2) sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ qui sont au-dessous de ou sur la droite d'équation $y = 3$ donc $S_2 = [-3\,;3]$. »

** Autre possibilité : « Les solutions de (3) sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ qui sont strictement au-dessus de droite d'équation $y = 1$ donc $S_3 =]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$. »

L'étape de réécriture des équations et inéquations est capitale : elle permet de aire le lien avec la fonction *f*, puis ensuite avec le graphique.

$\boxed{13}$ **Représentation graphique d'une fonction définie par intervalles**

$f(x)=x^2$ pour $x<1$ et $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pour $x\geqslant 1$

On notera que la fonction *f* est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction *f* est définie par intervalles (une expression sur chaque intervalle).

La courbe est « continue » (les deux morceaux de courbe se raccordent parfaitement au point de coordonnées $(1\,;1)$).

Le point $A(1\,;1)$ appartient à la courbe représentative **C** de *f*. Rien ne doit apparaître pour ce point.

Mettre le nom de la représentation graphique : **C**.

Remarque : s'il y avait eu un point de rupture, on n'aurait pas joint pas les deux points d'un trait vertical.

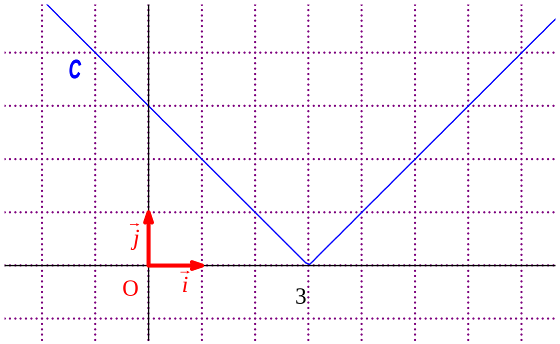
$\boxed{14}$ **$f : x \mapsto |x-3|$**

1°) **Expression de *f* sans barres de valeur absolue**

- Si $x\geqslant 3$, alors $x-3\geqslant 0$ donc $f(x)=x-3$.
- Si $x\leqslant 3$, alors $x-3\leqslant 0$ donc $f(x)=\left|\underbrace{x-3}_{\leqslant 0}\right|=-(x-3)=-x+3$.

2°) **Représentation graphique de** f

On trace les droites D et D' d'équations respectives $y=x-3$ et $y=-x+3$.



On vérifie le tracé sur calculatrice ou sur ordinateur en utilisant un logiciel de tracé de courbes (avec la calculatrice, la valeur absolue s'obtient par abs).

Mettre le nom de la représentation graphique : **C**.

La représentation graphique **C** de *f* est la réunion de deux demi-droites.

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel s'avère extrêmement pertinente pour les exercices $\boxed{15}$, $\boxed{16}$, $\boxed{17}$ et $\boxed{18}$.

$\boxed{15}$ **Développements**

$(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$; $(x-3)^3=x^3-9x^2+27x-27$.

Solution détaillée :

Développons les expressions $(2x+1)^3$ et $(x-3)^3$.

On utilise les identités remarquables cubiques.

Développement de $(2x+1)^3$.

On applique l'identité remarquable :
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
avec $a=2x$ et $b=1$.

$$\begin{aligned}(2x+1)^3&=(2x)^3+3\times(2x)^2\times1+3\times2x\times1^2+1^3\\&=8x^3+3\times4x^2+6x+1\\&=8x^3+12x^2+6x+1\end{aligned}$$

Développement de $(x-3)^3$.

On applique l'identité remarquable :
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
avec $a=x$ et $b=3$.

$$\begin{aligned}(x-3)^3&=x^3-3\times x^2\times3+3\times x\times3^2-3^3\\&=x^3-9x^2+3\times x\times9-27\\&=x^3-9x^2+27x-27\end{aligned}$$

$\boxed{16}$ **Factorisations**

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; $8x^3+1=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

Solution détaillée :

Factorisons les expressions x^3-1 et $8x^3+1$.

On utilise les identités remarquables cubiques.

Factorisation de x^3-1.

On applique l'identité remarquable :
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
avec $a=x$ et $b=1$.

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Factorisation de $8x^3+1$.

On applique l'identité remarquable :
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
avec $a=2x$ et $b=1$.

$$\begin{aligned}8x^3+1&=(2x)^3+1^3\\&=(2x+1)\left[(2x)^2-2x\times1+1^2\right]\\&=(2x+1)(4x^2-2x+1)\end{aligned}$$

$\boxed{17}$ $x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Solution détaillée :

Factorisons l'expression x^6-1.

$$\begin{aligned}x^6-1&=(x^3)^2-1^2\\&=(x^3+1)(x^3-1) \qquad \text{(identité remarquable } a^2-b^2\text{)}\\&=(x^3+1^3)(x^3-1^3)\\&=(x+1)(x^2+x+1)(x-1)(x^2-x+1) \qquad \text{(identités remarquables } a^3+b^3 \text{ et } a^3-b^3\text{)}\\&=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

$\boxed{18}$ $\text{A}=3a^2+3b^2+3c^2-2ab-2bc-2ac$

N.B. : On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel pour vérifier le résultat.

Solution détaillée :

On applique l'identité remarquable $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.

Développons l'expression $\text{A}=(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2$.

Méthode : on développe séparément la « première partie », la « deuxième partie » et la « troisième partie » de A.

- On développe $(a+b-c)^2$ en appliquant l'identité remarquable pour $x=a$, $y=b$, $z=-c$:

$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$ (1)

- On développe $(b+c-a)^2$ en appliquant l'identité remarquable pour $x=b$, $y=c$, $z=-a$:

$(b+c-a)^2=b^2+c^2+a^2+2bc-2ca-2ab$ (2)

- On développe $(c+a-b)^2$ en appliquant l'identité remarquable pour $x=c$, $y=a$, $z=-b$:

$(c+a-b)^2=c^2+a^2+b^2+2ca-2ab-2bc$ (3)

En additionnant membre à membre les égalités (1), (2), (3), on obtient en simplifiant
$\text{A}=3a^2+3b^2+3c^2-2ab-2bc-2ac$.

$\boxed{19}$

$a\neq0$ et $b\neq0$

Démontrons que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2=\dfrac{(a-b)^2}{ab}$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2&=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}-\frac{2ab}{ab} \qquad \left(\text{on applique l'égalité : } \frac{x}{y}+\frac{z}{t}=\frac{xt+yz}{yt}\right)\\&=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}\\&=\frac{(a-b)^2}{ab}\end{aligned}$$