$1^{\text{ère}}$ S

Équations de droites et systèmes

Plan du chapitre :

Objectifs :

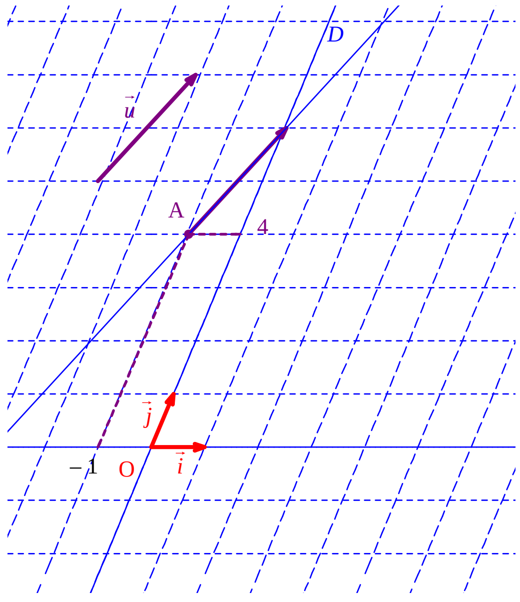
- consolider les connaissances de seconde ;
- approfondir la notion d'équation de droite ;
- étudier de nouvelles méthodes.

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. Exemples

1°) La droite *D* est définie par un couple $\left(\text{A}, \vec{u}\right)$.

On considère la droite *D* passant par le point $\text{A}\left(-1 ; 4\right)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\,(1 ; 2)$ pour vecteur directeur.



On sait déterminer graphiquement l'équation réduite de la droite *D*.

En effet, par lecture graphique, on trouve que :

Le coefficient directeur de *D* est égal à 2 (en effet, si l'on avance de 1 une unité vers la droite selon le vecteur $\vec{i}$, on monte de 2 unités vers le haut selon le vecteur $\vec{j}$; le résultat du calcul $\dfrac{2}{1}=2$ fournit le coefficient directeur de la droite *D*).
L'ordonnée à l'origine de *D* est égale à 6.
Donc la droite *D* a pour équation réduite $y=2x+6$.
Cette équation (égalité) peut aussi être écrite sous la forme $2x-y+6=0$.
On dit que cette égalité est une équation cartésienne de la droite *D*.
Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux équations cartésiennes de droites et nous allons montrer comment déterminer une équation cartésienne de droite directement, sans passer par l'équation réduite. Nous allons donc apprendre une nouvelle méthode et par conséquent nous abandonnerons les méthodes de 2^{e} pour déterminer des équations réduites.

Déterminons une équation cartésienne de *D*.

On utilise une méthode vectorielle.

$\text{M}\left(x ; y\right)$ est un point quelconque du plan.

M $\in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x+1 \\ y-4 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-4 & 2 \end{vmatrix}=0$ (on traduit la colinéarité à l'aide du déterminant)

si et seulement si $2(x+1)-1(y-4)=0$ (on développe le déterminant ; on utilise des parenthèses)

si et seulement si $2x+2-y+4=0$ (on poursuit le développement)

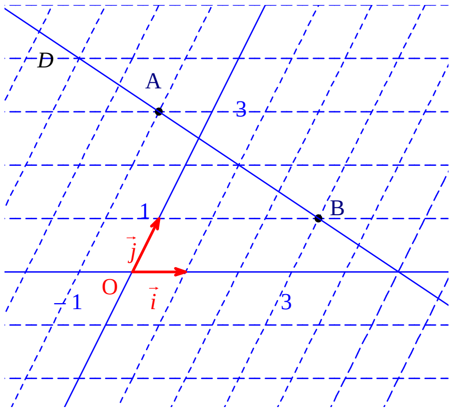
si et seulement si $2x-y+6=0$ (on réduit et on ordonne)

L'égalité $2x-y+6=0$ est une équation cartésienne de *D*.

2°) La droite *D* est définie par deux points distincts A et B.

On considère la droite *D* qui passe par les points A(– 1 ; 3) et B(3 ; 1).

Déterminons une équation cartésienne de *D*.



M$(x\,;y)$ est un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 4 \\ -2 \end{vmatrix}$

M $\in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x+1 \\ y-3 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ y-3 & -2 \end{vmatrix}=0$

si et seulement si $-2(x+1)-4(y-3)=0$

si et seulement si $-2x-2-4y+12=0$

si et seulement si $-2x-4y+10=0$

si et seulement si $x+2y-5=0$

$x+2y-5=0$ est une équation cartésienne de *D*.

La rédaction des deux exemples est à apprendre par cœur (modèle de rédaction : utilisation d'un point M de coordonnées $(x\,;y)$ et chaîne d'équivalences).

II. Cas général

1°) Démonstration

D est une droite définie par un point A$(x_A\,;y_A)$ et par un vecteur non nul $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$.

$\vec{u}$ est non nul donc $(\alpha\,;\beta)\neq(0\,;0)$.

M$(x\,;y)$ est un point quelconque du plan.

M $\in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{vmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix}=0$

si et seulement si $\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0$

si et seulement si $\beta x-\alpha y-\beta x_A+\alpha y_A=0$

$\beta x-\alpha y-\beta x_A+\alpha y_A=0$ est une équation cartésienne de *D*.

On obtient une égalité de la forme $ax+by+c=0$ (1).

Cette égalité traduit l'appartenance du point M$(x\,;y)$ à la droite *D*.
Elle exprime que si M appartient à la droite *D*, alors ses coordonnées vérifient cette égalité et que réciproquement, si *x* et *y* vérifient cette relation, alors M appartient à la droite *D*.
On peut dire que cette égalité **caractérise** l'appartenance de M à la droite *D*.
L'égalité (1) est appelée **<u>une</u> équation cartésienne** de la droite *D*.

2°) Propriété

Toute droite admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.

3°) Remarque sur l'écriture d'une équation cartésienne de droite

- Une équation cartésienne de droite est écrite dans un certain ordre : d'abord *x*, puis *y* et enfin le nombre.

- On écrit une équation cartésienne sous la forme $ax+by+c=0$ et non sous la forme $xa+yb+c=0$.

- *a*, *b*, *c* sont appelés les coefficients de l'équation.
a est le coefficient de *x*, *b* est le coefficient de *y*.

4°) Commentaires sur le mot « équation »

a) Le mot **« équation »** ne convient pas à proprement parler pour désigner l'égalité (1) car il n'a pas le sens habituel dans lequel il est employé : il n'y a pas d'inconnue. Il s'agit plutôt d'une relation entre les coordonnées d'un point caractérisant son appartenance à la droite.
Cependant, c'est un terme qui est employé depuis longtemps et qu'on continue à utiliser.
Il a néanmoins le mérite de rappeler qu'il s'agit d'une égalité comme dans une équation « normale ».

b) Une équation de droite caractérise l'appartenance d'un point à une droite à l'aide des coordonnées (c'est une propriété caractéristique). On dit que c'est une condition analytique d'appartenance d'un point à une droite.

c) On peut multiplier ou diviser par un même nombre non nul le premier membre d'une équation cartésienne de droite. On obtient une équation équivalente.
Par exemple, la droite d'équation cartésienne $2x+y-3=0$ a aussi pour équation cartésienne $4x+2y-6=0$ ou encore $-2x-y+3=0$.

d) Une égalité telle que $ax+by+c=0$ où a, b, c sont trois réels donnés peut être vue comme une équation à deux inconnues, ou plutôt comme une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}^2$.
Résoudre cette équation c'est déterminer tous les couples vérifiant cette égalité.
Lorsque $(a\,;b)\neq(0\,;0)$, les couples solutions sont les coordonnées des points de la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ dans un repère.

e) Pour déterminer une équation cartésienne de droite, on utiliser la méthode présentée dans les exemples en respectant la rédaction (utilisation d'un point M, chaîne d'équivalences etc.).

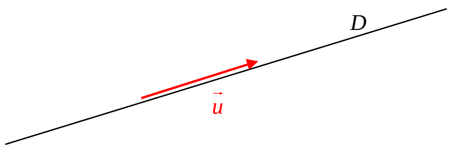
f) Un petit programme sur calculatrice permet de trouver une équation cartésienne d'une droite définie par deux points [voir cours intitulé **« Algorithmes (2) : Premiers programmes sur calculatrice »** ; le programme se trouve dans l'exercice $\boxed{3}$].

g) La méthode décrite précédemment s'applique pour les droites parallèles aux axes du repère mais il maladroit de l'utiliser dans ce cas. Pour une droite parallèle aux axes, on est capable de donner tout de suite une équation (sans effectuer de calculs).

III. Vecteur directeur d'une droite

1°) Définition

D est une droite du plan.
On appelle **vecteur directeur** de *D* tout vecteur $\vec{u}$ non nul qui a la même direction que *D*.



2°) Remarque

Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs.
Plus précisément, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de *D*, alors les vecteurs directeur de *D* sont les vecteurs de la forme $k\vec{u}$ avec $k\in\mathbb{R}^*$.

Si A et B sont deux points distincts, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) ; $\overrightarrow{BA}$ est aussi un vecteur directeur de (AB).

3°) Propriété [coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite à partir d'une équation cartésienne]

D est une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ où a, b, c sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.
Le vecteur $\vec{u}(-b\,;a)$ est **un** vecteur directeur de *D*.

Cette propriété résulte de la démonstration du **II**.

4°) Application aux droites parallèles aux axes de coordonnées

D : $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$

Le vecteur $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de *D*.

Le vecteur $\vec{i}$ (1[er] vecteur du repère) a pour coordonnées $(1\,;0)$.
Le vecteur $\vec{j}$ (2[e] vecteur du repère) a pour coordonnées $(0\,;1)$.

D // (O*x*) si et seulement si $\vec{i}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}=0$
si et seulement si $1\times a=0$
si et seulement si $a=0$

D // (O*y*) si et seulement si $\vec{j}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
si et seulement si $\begin{vmatrix} 0 & -b \\ 1 & a \end{vmatrix}=0$
si et seulement si $1\times b=0$
si et seulement si $b=0$

On retient la propriété :

D est une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ où a, b, c sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.

D // (O*x*) si et seulement si $a=0$.

D // (O*y*) si et seulement si $b=0$.

IV. Équation réduite

1°) Démonstration

D est une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ ($(a\,;b)\neq(0\,;0)$).

• Lorsque $b\neq0$ c'est-à-dire $D \not\parallel$ (O*y*)

L'équation cartésienne peut se mettre sous la forme $y=\underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}x\underbrace{-\frac{c}{b}}_{p}$.

On obtient une équation de la forme $\boldsymbol{y=mx+p}$.

Cette équation est appelée **l'équation réduite** de D.

m est appelée le coefficient directeur de D.
p est appelée l'ordonnée à l'origine de D.

D est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto mx + p$.

• Lorsque $b = 0$ c'est-à-dire D // (Oy)

L'équation cartésienne peut se mettre sous la forme $x = -\dfrac{c}{a}$.

On obtient une équation de la forme $\boldsymbol{x = k}$.
Cette équation est aussi appelée parfois l'équation réduite de D.

Les équations réduites auront une importance un peu moins grande que les années précédentes au profit des équations cartésiennes dont nous verrons l'intérêt en exercices.
On évitera en particulier d'avoir recours systématiquement aux équations réduites.

2°) Propriété

• Toute droite D non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.

• Toute droite D parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$.

3°) Vocabulaire

$D : y = mx + p$

m : **coefficient directeur** de D (ou **pente** en repère orthonormé)
p : **ordonnée à l'origine** de D (D passe par le point $\mathrm{P}(0\,;\,p)$)

4°) Vecteur directeur et coefficient directeur

$D : y = mx + p$

Une équation cartésienne de D s'écrit : $\underbrace{m}_{a}x\underbrace{-1}_{b}y+\underbrace{p}_{c}=0$.

Le vecteur $\vec{u}\left(\boxed{1}\,;\,m\right)$ est <u>un</u> vecteur directeur de D.

toujours

5°) Formule du coefficient directeur

D est une droite non parallèle à (Oy).
A et B sont deux points quelconques distincts de D.
Le coefficient directeur de D est égal à : $m = \dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}$.

Cette formule se démontre aisément.

6°) Équation d'une droite passant par un point et de coefficient directeur donné

• Propriété :

La droite D passant par un point $\mathrm{A}\left(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A}\right)$ et de coefficient directeur m a pour équation $\boldsymbol{y = m\left(x - x_\mathrm{A}\right) + y_\mathrm{A}}$.

• Démonstration :

1ère méthode :

On sait que le vecteur $\vec{u}(1\,;\,m)$ est un vecteur directeur de D.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M} \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\left|\begin{matrix} x - x_\mathrm{A} \\ y - y_\mathrm{A}\end{matrix}\right.$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x - x_\mathrm{A} & 1 \\ y - y_\mathrm{A} & m \end{vmatrix} = 0$ (on traduit la colinéarité à l'aide du déterminant)

si et seulement si $m\left(x - x_\mathrm{A}\right) - \left(y - y_\mathrm{A}\right) = 0$ (on développe le déterminant ; on utilise des parenthèses)

si et seulement si $m\left(x - x_\mathrm{A}\right) - y + y_\mathrm{A} = 0$ (on poursuit le développement)

si et seulement si $y = m\left(x - x_\mathrm{A}\right) + y_\mathrm{A}$ (on réduit et on ordonne)

D a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_\mathrm{A} & 1 \\ y - y_\mathrm{A} & m \end{vmatrix} = 0$.
On obtient la forme d'équation donnée en développant ce déterminant.

2e méthode :

On sait que l'équation réduite de D s'écrit $y = mx + p$ où p est un réel.
Comme $\mathrm{A} \in D$, $y_\mathrm{A} = mx_\mathrm{A} + p$ d'où $p = y_\mathrm{A} - mx_\mathrm{A}$.
En remplaçant, on obtient l'équation $y = mx + y_\mathrm{A} - mx_\mathrm{A}$ qui s'écrit sous la fume $y = m\left(x - x_\mathrm{A}\right) + y_\mathrm{A}$ correspondant à la formule.

• Utilisation :

La formule permet d'obtenir très rapidement une équation d'une droite dont on connaît un point et le coefficient directeur.

Cette formule sert à trouver une équation (l'équation réduite) de la droite D passant par un point A dont on connaît les coordonnées et de coefficient directeur m donné.

● **Exemple :**

Déterminer une équation de la droite *D* passant par le point $A(3\,;6)$ et de coefficient directeur 5.
On applique la formule en remplaçant *m*, x_A et y_A par leurs valeurs respectives.
On conserve *x* et *y* tels quels.

Une équation de *D* s'écrit $y=5(x-3)+6$ soit $y=5x-9$.

V. Parallélisme de deux droites

1°) Condition nécessaire et suffisante de parallélisme de deux droites définies par une équation cartésienne

$D:\ ax+by+c=0\ \left((a\,;b)\neq(0\,;0)\right)$
$D':\ a'x+b'y+c'=0\ \left((a'\,;b')\neq(0\,;0)\right)$

On sait que le vecteur $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de *D*.
On sait que le vecteur $\vec{u'}(-b'\,;a')$ est un vecteur directeur de *D'*.

$D \,//\, D'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires
si et seulement si $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix}=0$
si et seulement si $-b\times a'-a\times(-b')=0$
si et seulement si $-b\times a'+a\times b'=0$
si et seulement si $ab'-a'b=0$

$D \,//\, D'$ si et seulement si $ab'-a'b=0$.

2°) Condition nécessaire et suffisante de parallélisme de deux droites à l'aide de leurs coefficients directeurs

$D:\ y=mx+p$
$D':\ y=m'x+p'$

Le vecteur $\vec{u}(1\,;m)$ est un vecteur directeur de *D*.
Le vecteur $\vec{u'}(1\,;m')$ est un vecteur directeur de *D'*.
$D \,//\, D'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires
si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m' \end{vmatrix}=0$
si et seulement si $1\times m'-m\times 1=0$
si et seulement si $m'-m=0$
si et seulement si $m=m'$

On retient la propriété :

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

3°) Position relative de deux droites dans le plan

Déterminer la **position relative** de deux droites dans le plan, c'est déterminer si elles sont sécantes ou parallèles.
Deux droites parallèles sont soit strictement parallèles (c'est-à-dire sans point commun) soit confondues.

4°) Remarques sur les coefficients

Remarque 1 :

Une équation réduite de droites fait intervenir 2 coefficients qui sont uniques.

Une équation cartésienne de droites fait intervenir 3 coefficients qui ne sont pas uniques (ils sont définis à un facteur multiplicatif près). C'est l'un des inconvénients des équations cartésiennes de droites (cf. avantages et inconvénients des équations de droites).

Remarque 2 :

On peut lire (interpréter) graphiquement les nombres *m* et *p* (coefficient directeur et ordonnée à l'origine).
On ne peut en revanche pas interpréter graphiquement les coefficients *a*, *b*, *c* d'une équation cartésienne.

VI. Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

1°) Généralités

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ où *a*, *b*, *c*, *a'*, *b'*, *c'* sont des réels.

Un tel système est appelé un **système linéaire de 2 équations à 2 inconnues**.
Les équations du système sont appelées des **équations linéaires** (l'adjectif linéaire vient du latin « linea » qui signifie droite).
a, *b*, *c*, *a'*, *b'*, *c'* sont les **coefficients** du système.
Le couple (*x* ; *y*) est appelé l'**inconnue** du système.

Le nombre $D=ab'-a'b=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé le **déterminant du système**.

Il convient de rappeler la signification des accolades pour les systèmes (ce point est évidemment fondamental).

L'accolade d'un système veut dire « et ».

2°) Interprétation géométrique

On suppose que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ et que $(a'\,;b')\neq(0\,;0)$.

$\Delta:\ ax+by+c=0$
$\Delta':\ a'x+b'y+c'=0$

Les solutions du système sont les coordonnées des points communs éventuels à Δ et Δ'.

• Lorsque $ab'-a'b=0$, Δ et Δ' sont parallèles (strictement parallèles ou confondues).
Le système admet soit une infinité de couples solutions (si Δ et Δ' sont confondues) soit aucun couple solution (si Δ et Δ' sont strictement parallèles).

• Lorsque $ab'-a'b\neq 0$, Δ et Δ' ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes en un point A.
Le système admet alors un unique couple solution.

3°) Théorème fondamental

• Lorsque $D\neq 0$, le système admet alors un unique couple solution.

• Lorsque $D=0$, le système admet soit une infinité de couples solutions soit aucun couple solution.

4°) Méthode de résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues

On doit toujours commencer par calculer le déterminant théoriquement.
Lorsque le déterminant est non nul, le système admet un unique couple solution.
On détermine ce couple par n'importe quelle méthode.

Lorsque le déterminant est nul, les droites associées au système sont parallèles. On transforme les deux équations afin de voir si les droites associées au système sont strictement parallèles ou confondues.

5°) Exemple de résolution de système

$$\begin{cases}5x+\ \ y=9 & (1)\\ 3x-2y=8 & (2)\end{cases}$$

Recensement des coefficients : $a=5$; $b=1$; $c=9$; $a'=3$; $b'=-2$; $c'=8$

Déterminant

$$\begin{aligned}D&=a\times b'-a'\times b\\ &=5\times(-2)-3\times 1\\ &=-13\end{aligned}$$

$D\neq 0$ donc le système admet un unique couple solution.

Méthodes de résolution :

- substitution
- combinaisons linéaires

● Substitution

(1) donne $y=9-5x$ $(1')$

On remplace dans (2).
$3x-2(9-5x)=8$
$13x=26$

$x=2$
On reprend $(1')$.
$y=9-5\times 2$
$y=-1$

L'ensemble des solutions du système est $S=\{(2\,;-1)\}$.
S est l'ensemble constitué du couple (2 ; – 1) **(singleton)**.
(repasser en rouge les parenthèses)

● Combinaisons linéaires

$$\begin{cases}5x+\ \ y=9 & \mathrm{L}_1\leftarrow 2\times\mathrm{L}_1\\ 3x-2y=8 & \mathrm{L}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}10x+2y=18 & \mathrm{L}_1\\ 3x-2y=8 & \mathrm{L}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}13x=26 & \mathrm{L}_1\leftarrow\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2 \text{ (calculs de tête)}\\ 3x-2y=8 & \mathrm{L}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\ 3\times 2-2y=8\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est $S=\{(2\,;-1)\}$.

N.B. : En général, pour les opérations sur les lignes, on effectue les calculs de tête.

Variante de la méthode de combinaisons : méthode des multiplicateurs

On calcule séparément *x* et *y*.
On place à droite du système les multiplicateurs permettant d'éliminer l'une des inconnues en ajoutant les équations.

$$\begin{cases}5x+\ \ y=9\\3x-2y=8\end{cases}\quad\begin{array}{|c|c}\times\mathbf{2} & \times\mathbf{3}\\ \times\mathbf{1} & \times(-\mathbf{5})\end{array}$$

pour trouver x pour trouver y

Les multiplicateurs dans la 1ère colonne permettent de trouver x.
On multiplie la totalité de la première équation par 2 et la totalité de la deuxième équation par 1.

Les multiplicateurs dans la 2e colonne permettent de trouver y.
On multiplie la totalité de la première équation par 3 et la totalité de la deuxième équation par – 5.

On choisit soi-même les multiplicateurs pour trouver x de telle sorte que les y disparaissent lors de l'addition membre à membre des deux équations multipliées par les coefficients.

On choisit soi-même les multiplicateurs pour trouver y de telle sorte que les x disparaissent lors de l'addition membre à membre des deux équations multipliées par les coefficients (autrement dit on a choisi les multiplicateurs pour « arriver » à un système avec « $0x$ » et « $0y$ »).

On obtient les équations $2(5x+\ y)+1\times(3x-2y)=2\times9+8$ et $3(5x+\ y)-5(3x-2y)=3\times9-8\times5$.

Calcul de x	**Calcul de y**
$\begin{cases}10x+2y=18\\3x-2y=8\end{cases}$	$\begin{cases}15x+3y=27\\-15x+10y=-40\end{cases}$
$13x=26$ (addition membre à membre) $x=2$	$13y=-13$ (addition membre à membre) $y=-1$

Dans les trois cas, on peut effectuer une vérification « à la main ».
On peut aussi utiliser la commande résolution de système linéaire de la calculatrice.

6°) Remarque sur les couples

La solution est un couple de réels. Un couple comporte un ordre : le couple (2 ; – 1) est différent du couple (– 1 ; 2).

L'ensemble de tous les couples $(x\,;\,y)$ de réels est noté $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

7°) Utilisation de la calculatrice

• La calculatrice Casio fx-92 Collège permet de résoudre les systèmes linéaires de deux ou trois inconnues.

Appuyer sur la touche $\boxed{\text{MODE}}$.

Choisir 3 : SYST.

Elle propose deux choix :

1 : $\text{anX}+\text{bnY}=\text{cn}$
2 : $\text{anX}+\text{bnY}+\text{cnZ}=\text{dn}$

Le choix 1 correspond à la résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Le choix 2 correspond à la résolution des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases}2x+3y=5\\x-2y=4\end{cases}$.

Les équations doivent être de la forme $ax+by=c$, ce qui est bien le cas ici (avec les notations de la calculatrice : $\text{aX}+\text{bY}=\text{c}$)

On rentre les coefficients du système un à un, comme suit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{a} & \text{b} & \text{c}\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\1 & -2 & 4\end{bmatrix}\end{array}$$

Appuyer sur la touche $\boxed{\text{EXE}}$.

On obtient les valeurs de x et y (notées X et Y par la calculatrice).

Dans le cas où le système n'admet pas un unique couple solution, c'est-à-dire lorsque le déterminant est nul, certains modèles affichent un message tels que « Infinité de sol » ou « Aucune solution ».

Sinon, on a un message de la forme « math ERROR ».

Remarque importante :

Lorsque veut résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues à l'aide de la calculatrice, il faut absolument avoir un système de la forme $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ car la calculatrice demande que les systèmes soient sous cette forme.

Par exemple, pour résoudre un système tel que $\begin{cases}x-3y-1=0\\3x+2y-6=0\end{cases}$, il faut commencer par transformer les équations afin d'écrire le système sous la forme $\begin{cases}x-3y=1\\3x+2y=6\end{cases}$.

• La calculatrice Casio Graph 35 permet de résoudre les systèmes linéaires de deux ou trois inconnues.

Appuyer sur la touche $\boxed{\text{MENU}}$. Choisir EQUA puis F1 : Système.
On peut aller jusqu'à des systèmes linéaires de 6 équations à 6 inconnues.

• La calculatrice TI-83 CE-Premium permet de résoudre les systèmes linéaires de deux ou trois inconnues.

Résolution d'un système sur la calculatrice TI-83 Plus.fr et TI-83 Premium CE :

• Taper sur les touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{résol}}$ (apps).
• Chercher l'application « PlySmlt2 ».
• Taper deux fois sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$ pour ouvrir l'application.
• Sélectionner 2 : « simult eqn solver » ou 2 : « SOLVEUR SYST D'EQUATIONS ».
• Appuyer sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.
• Choisir ensuite dans les réglages le nombre d'équations du système et le nombre d'inconnues (« unknowns »).
• On choisit le type de résultat que l'on veut obtenir, soit décimale, soit fractionnaire.
• On choisit dans la ligne de réglage « float » ou « FLOTT » le nombre de décimales que l'on désire voir affichées pour les résultats.
• On tape sur la touche $\boxed{\text{graphe}}$ située en bas à droite de l'écran.
• Lorsqu'il y a deux inconnues, les équations s'affichent sous la forme $0x+\quad 0y=\quad 0$.
Pour davantage d'inconnues, on a un affichage matriciel.
• On replace les 0 par les coefficients du système à résoudre.
• Pour finir on tape sur la touche $\boxed{\text{graphe}}$ pour résoudre le système.

• **Programme sur calculatrice TI pour un système** $\begin{cases} \text{AX}+\text{BY}=\text{C} \\ \text{DX}+\text{EY}=\text{F} \end{cases}$

```
: Prompt A, B, C, D, E, F
: A*E–D*B → S
: If S≠0
: Then
: (C*E–F*B)/S → X
: (A*F–D*C)/S → Y
: Disp X➤Frac
: Disp Y➤Frac
: Else
: Disp "INFINITE OU AUCUNE SOL"
: End
```

VII. Intersection de deux droites

1°) Exemple

On considère les droites D et D' d'équations cartésiennes respectives $2x+3y-5=0$ et $3x+2y-1=0$.

Déterminer l'intersection des droites D et D'.

On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5$.

Comme ce déterminant est non nul, D et D' ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point A.

Pour déterminer les coordonnées de A, on résout le système $\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases}$.

Attention, il ne sert à rien d'écrire $2x+3y-5=3x+2y-1$.
En effet, cela nous conduirait à l'équation $-x+y-4=0$ qui est de nouveau une équation linéaire qui ne permet pas de déterminer les valeurs de x et y.

2°) Point-méthode

Pour déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes dont on connaît des équations cartésiennes, il faut résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

VIII. Utilisation de *Geogebra*

Il est possible de rentrer dans *Geogebra* une équation cartésienne de droite sous la forme $y=mx+p$ ou $x=k$ ou $ax+by+c=0$.

On peut aisément faire apparaître un vecteur directeur et le coefficient directeur de la droite lorsqu'elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Commentaires
sur les équations de droites

S'adapter à de nouvelles notations.

Passer de $y = ax + b$ à $y = mx + p$.

S'adapter à de nouvelles méthodes.

Méthode vectorielle

Abandonner le recours systématique aux équations réduites.

Ne pas passer systématiquement par les équations réduites.

Passer d'une équation cartésienne à une équation réduite introduit souvent des fractions, ce qui complique plutôt.

Ne pas employer de notations idiotes :

$\cancel{a_{(AB)}}$ ou $\cancel{m_{(AB)}}$; les lettres *x* et *y* ne peuvent être affublées d'aucun prime ou indice.

Tracé d'une droite. Notion de « points au hasard »

Dans une classe, il n'y aura pas deux élèves qui prendront les mêmes points mais tous auront la même droite car c'est la même équation.

À la fin du chapitre, faire un bilan sur les moyens de définir une droite dans le plan.

Une droite du plan peut être définie par :
- deux points distincts
- un point et un vecteur directeur
- un point et une autre droite à laquelle elle est parallèle

Nous savons dans ce chapitre déterminer une équation cartésienne de droites dans chacun de ces trois cas.

Nous savons qu'il y a d'autres moyens de définir une droite.
- un point et une droite à laquelle est perpendiculaire
- un point et un vecteur normal

Nous verrons plus tard avec l'outil du produit scalaire comment déterminer une équation cartésienne de droite dans chacun de ces deux cas.

$D : y = mx + p$
Les deux points signifient « a pour équation ».

Utilisation d'un même point M(*x*, *y*) pour plusieurs équations de droites.

Utilisation de Geogebra : l'une des compétences du chapitre est de savoir des droites définies par des équations à l'aide d'un LGD tel que Geogebra

Deux droites, trois droites…
Faut-il noter les équations $y_1 = \ldots$, $y_2 = \ldots$, $y_3 = \ldots$ (comme on pourrait être tenté de le faire par excès de rigueur) ?

Remarque de notation :

Les lettres *x* et *y* qui interviennent dans les équations de droites ou de courbes sont immuables.
Elles ne peuvent être affublées d'aucun indice ni d'aucun prime.
Même si on considère plusieurs droites ou plusieurs courbes leurs équations seront notées avec les mêmes lettres *x* et *y*.
Le mot « équation » désigne en fait une relation qui lie les coordonnées d'un point courant M(*x* ; *y*) du plan.
Contrairement aux calculatrices graphiques où les équations de courbes sont notées Y1, Y2, Y3 …

Par contre, malencontreusement pour un point A du plan, on note x_A et y_A ses coordonnées.
On utilise encore les lettres *x* et *y* mais cette fois la notation est à comprendre de manière globale.

Exemple :

$D : y = 2x + 3$

$A \in D$ donc $y_A = 2x_A + 3$.
Il n'y a pas de contradiction par rapport à ce qui a été dit avant.