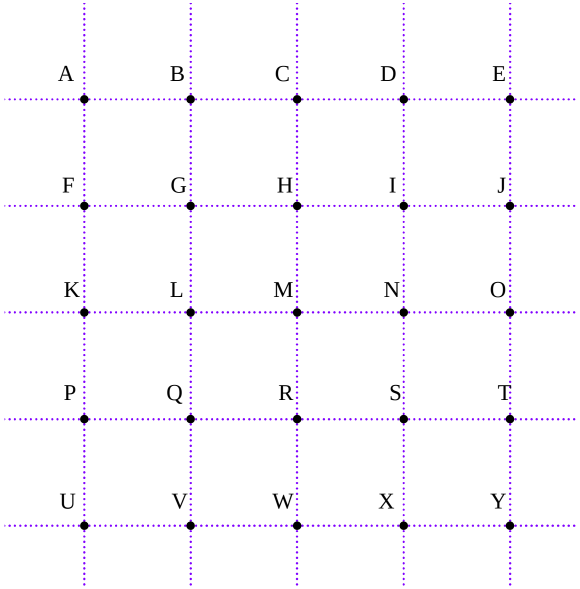
1ère S

Exercices sur les vecteurs du plan

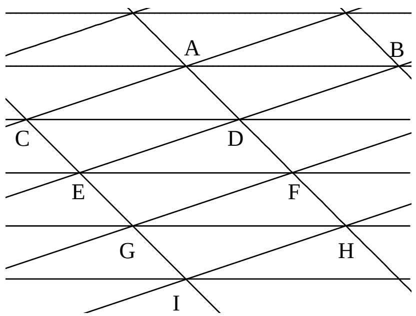
$\boxed{1}$ En observant la figure ci-dessous constituée d'un quadrillage régulier, recopier et compléter les phrases ci-dessous :

a. Par la translation qui transforme A en D, L a pour image …. .
b. Par la translation qui transforme C en L, …. a pour image M.
c. Par la translation qui transforme F en …. , C a pour image T.
d. Par la translation qui transforme A en H, H a pour image …. .
e. Par la translation qui transforme B en V, …. a pour image X.
f. Par la translation qui transforme …. en R, H a pour image T.
g. Par la translation qui transforme I en A, S a pour image …. .
h. Par la translation qui transforme D en B, M a pour image …. .

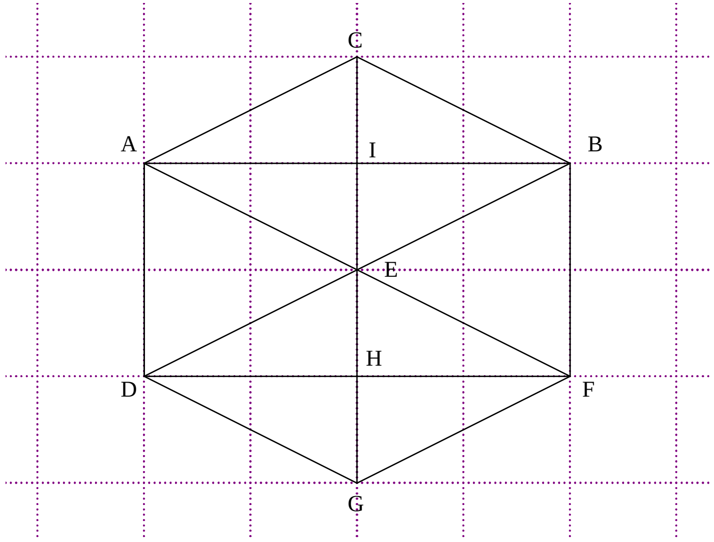


$\boxed{2}$ Déterminer l'image de chacun des points A et E par la translation de vecteur :

a) $\overrightarrow{AB}$;
b) $\overrightarrow{GI}$;
c) $\overrightarrow{DH}$.



$\boxed{3}$ On considère l'hexagone ACBFGD représenté sur la figure ci-dessous.

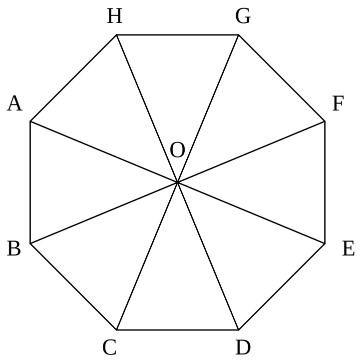


Recopier et compléter le tableau suivant :

L'image de…	**par la translation de vecteur…**	**est le point…**
A	$\overrightarrow{DE}$	
	$\overrightarrow{GH}$	C
H		F
B		C

Pour les lignes 3 et 4, on ne donnera qu'un seul vecteur pour définir la translation.

$\boxed{4}$ Soit ABCDEFGH un octogone régulier de centre O.



Reproduire la figure puis recopier et compléter le tableau ci-dessous en mettant des croix :

Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction				
ont le même sens				
ont la même norme				

$\boxed{5}$ Soit ABCD et BFEC deux parallélogrammes ayant le côté [BC] en commun.
Démontrer en utilisant les vecteurs que le quadrilatère AFED est un parallélogramme.

$\boxed{6}$ En utilisant la relation de Chasles, recopier et compléter les égalités suivantes (chaque point doit être remplacé par une lettre désignant un point) :

a. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{B\bullet}$	b. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\bullet A} + \overrightarrow{A\bullet}$	c. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\bullet P} + \overrightarrow{\bullet\bullet}$	d. $\overrightarrow{\bullet E} = \overrightarrow{F\bullet} + \overrightarrow{G\bullet}$
e. $\overrightarrow{H\bullet} = \overrightarrow{\bullet\bullet} + \overrightarrow{IJ}$	f. $\overrightarrow{\bullet\bullet} = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{\bullet M}$	g. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{\bullet\bullet}$	h. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\bullet C} + \overrightarrow{\bullet D} + \overrightarrow{\bullet\bullet}$

$\boxed{7}$ Soit A, B, C, D et E cinq points quelconques.
Démontrer que : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$.

$\boxed{8}$ Soit ABCD un parallélogramme.
Faire une figure.
Démontrer que :
a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

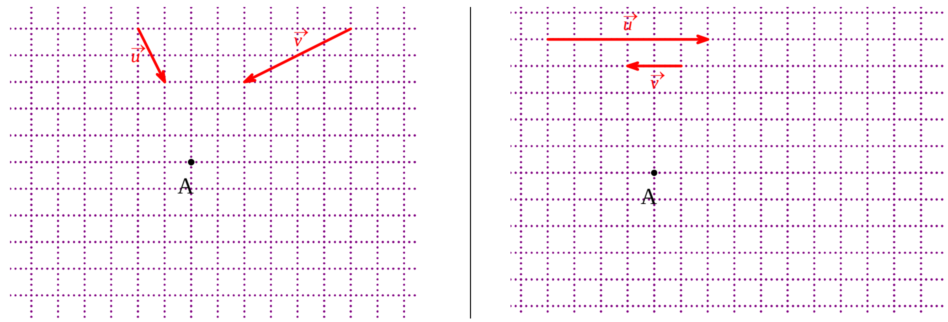
$\boxed{9}$ Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
Écrire plus simplement : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

$\boxed{10}$ Écrire le plus simplement possible les vecteurs :

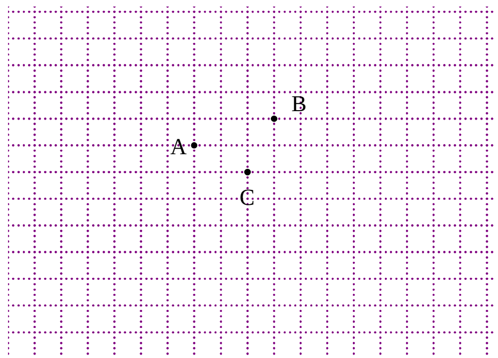
1°) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ $\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}$

2°) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ $\vec{v} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NP}$ $\vec{w} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EQ} - \overrightarrow{EP}$

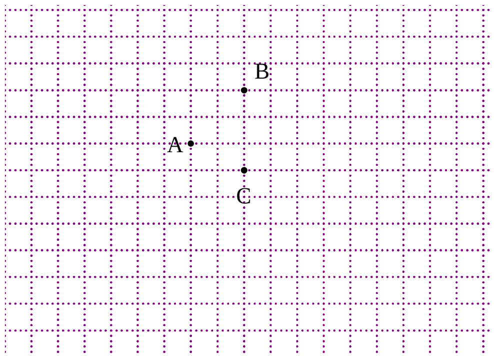
$\boxed{11}$ Reproduire chacune des figures données et construire les points M et N définis par les égalités :
$\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{u} - \vec{v}$.



$\boxed{12}$ Reproduire la figure donnée ci-dessous et construire les points M et N définis par les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.

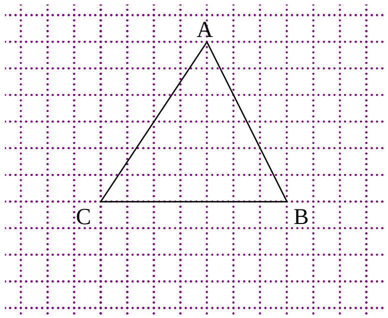


13 Reproduire la figure donnée ci-dessous et construire les points M et N définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.



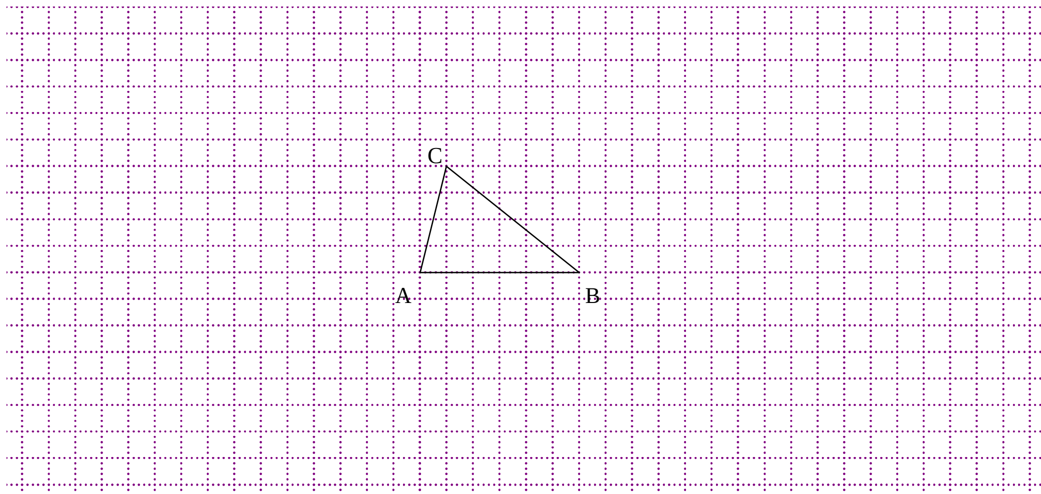
14 Soit ABC un triangle.

Reproduire la figure ci-dessous et construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



15 Soit ABC un triangle.

Reproduire la figure ci-dessous et construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$.



16 Soit ABC un triangle quelconque.

1°) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Pour la figure, on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B et C « au-dessus » de (AB).
2°) Démontrer que C est le milieu du segment [MN].

17 Soit ABC un triangle quelconque.
On note A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [BA].
Faire une figure codée.
Calculer la somme vectorielle $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

18 Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

19 Soit A et B deux points distincts du plan. On note M le point défini par $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (1).
1°) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
Indication : remplacer $\overrightarrow{MB}$ par $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$ dans l'égalité (1).
2°) Construire M.

20 Soit ABC un triangle quelconque.

1°) Construire les points E et F définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2°) Démontrer que (EF) et (BC) sont parallèles.

21 Soit ABC un triangle quelconque.

On note M et N les points définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles en utilisant les vecteurs.

$\boxed{\textbf{22}}$ Soit ABC un triangle quelconque.

On considère les points I, J, K définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Faire une figure.

1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (il s'agit d'obtenir une égalité de la forme $\overrightarrow{IJ}=\ldots\ \overrightarrow{AB}+\ldots\ \overrightarrow{AC}$).

2°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3°) Démontrer à l'aide des questions précédentes que les points I, J, K sont alignés.

$\boxed{\textbf{23}}$ Soit ABCD un parallélogramme.

On considère les points I, J, K, L définis par les égalités vectorielles

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (1), $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (2), $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ (3), $\overrightarrow{DL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ (4).

Faire une figure (on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D « au-dessus » de (AB), l'angle $\widehat{BAD}$ aigu).

Écrire les hypothèses.

Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

$\boxed{\textbf{24}}$ Soit ABCD un parallélogramme.

On note M et N les points définis par les égalités $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Démontrer que les droites (AM) et (DN) sont parallèles.

Corrigé

1 Parallélogramme et translation (exercice de base)
Connaissances nécessaires : translation.

a. O	b. D	c. W	d. O	e. D	f. F	g. K	h. K

a. Par la translation qui transforme A en D, L a pour image O.
b. Par la translation qui transforme C en L, D a pour image M.
c. Par la translation qui transforme F en W, C a pour image T.
d. Par la translation qui transforme A en H, H a pour image O.
e. Par la translation qui transforme B en V, D a pour image X.
f. Par la translation qui transforme F en R, H a pour image T.
g. Par la translation qui transforme I en A, S a pour image K.
h. Par la translation qui transforme D en B, M a pour image K.

2 Images de points par une translation

a) L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est B.
L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{GI}$ est D.
L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DH}$ est F.

b) L'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est F.
L'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{GI}$ est G.
L'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DH}$ est I.

3

Tableau :

L'image de…	par la translation de vecteur…	est le point…
A	$\overrightarrow{DE}$	C
I	$\overrightarrow{GH}$	C
H	$\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{DH}$; $\overrightarrow{HF}$	F
B	$\overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{GD}$	C

L'image du point H par la translation de vecteur … est le point F.

Il y a plusieurs réponses possibles. On peut donner $\overrightarrow{IB}$ ou tout autre vecteur égal à $\overrightarrow{IB}$ ($\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HF}$).

4 Cet exercice a pour but de revoir les 3 caractéristiques d'un vecteur défini par 2 points distincts. Il importe de ne pas confondre « sens » et « direction » d'un vecteur.

La construction d'un octogone s'effectue à la règle et au compas (carré puis bissectrices des diagonales).

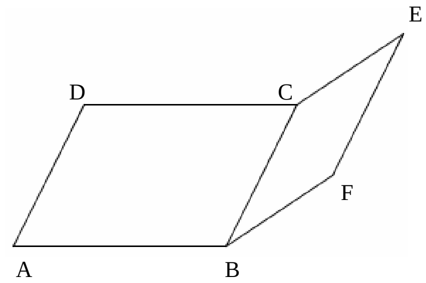
Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction		×	×	×
ont le même sens		×	×	
ont la même norme	×		×	×

Pour savoir si les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont la même direction, on regarde si les droites (GH) et (BC) sont parallèles → utiliser les doigts pour voir les vecteurs.

5 On commence par faire une figure.
On écrit les hypothèses de l'exercice.

ABCD parallélogramme

BFEC parallélogramme



Démontrons que le quadrilatère AFED est un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
BFEC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$.
On a donc : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$.
Plus particulièrement, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FE}$.
On en déduit que le quadrilatère AFED est un parallélogramme.

6 **Utilisation de la relation de Chasles**

On ne fait pas de figure pour cet exercice.

a. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}$	b. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$	c. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$	d. $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}$
e. $\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IJ}$	f. $\overrightarrow{JM}=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KM}$	g. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$	h. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

Le 21-1-2016

Cours particulier avec Aymeric Valette

Le point correspond au nom d'une lettre désignant un point :

Pour le g :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

7 **Démonstration d'une égalité vectorielle**

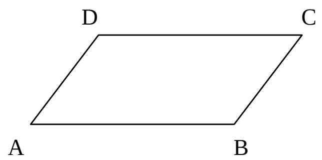
A, B, C, D, E sont cinq points quelconques.

Démontrons que : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\\&=\overrightarrow{AA}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

8 **Démonstrations d'égalités vectorielles**

ABCD : parallélogramme



Faire impérativement une figure.

a) **Démontrons que $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.**

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}&=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\\&=\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

Autre méthode :

ABCD est un parallélogramme donc d'après la règle du parallélogramme on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
En multipliant les deux membres par – 1, on obtient : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

b) **Démontrons que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.**

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

c) **Démontrons que $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.**

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

9 **Simplification d'une somme vectorielle**

A, B, C, D : points quelconques du plan

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Simplifions $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AA}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Simplifications de sommes vectorielles

On utilise chaque fois la relation de Chasles.

1°)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}\\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{FA}\\ &= \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FA}\\ &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FA}\\ &= 2\overrightarrow{FA}\end{aligned}$$

2°)

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NP}\\ &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EQ} - \overrightarrow{EP}\\ &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{PE}\\ &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{QA}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Autre façon :

2°)

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NP}\\ &= \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NP}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

$\boxed{11}$ Constructions de points (constructions vectorielles)

Il s'agit d'un exercice de construction.

$\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{AN} = \vec{u} - \vec{v}$

1[ère] méthode : utilisation de la relation de Chasles (vecteurs mis « bout à bout »)

Figure de gauche :

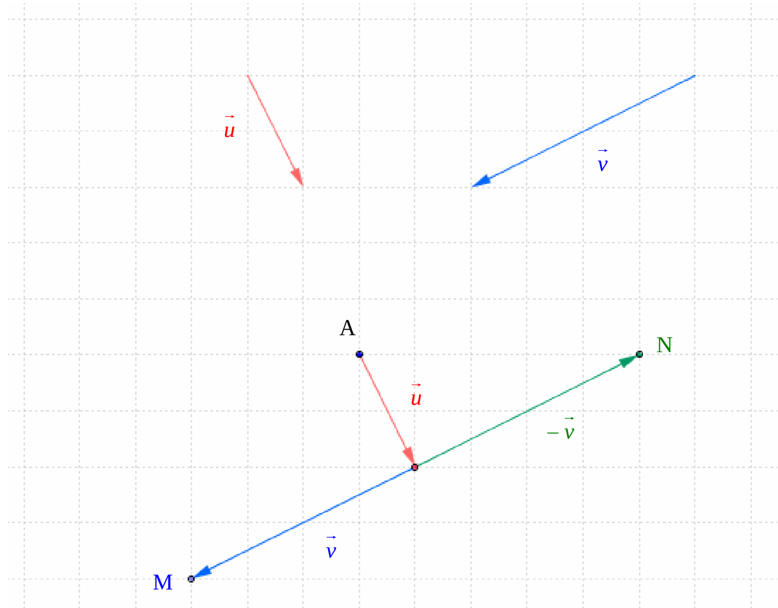
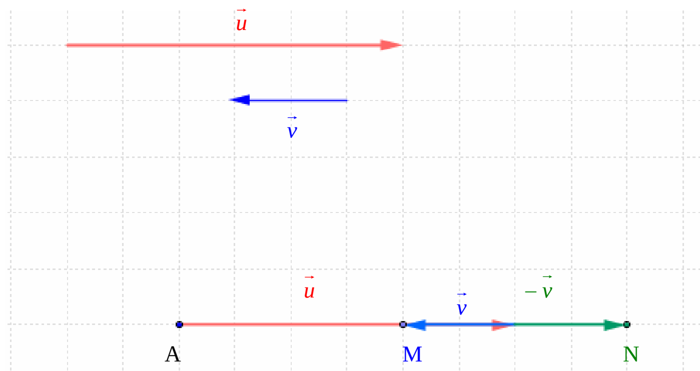


Figure de droite :



2[e] méthode : utilisation de la règle du parallélogramme (non faite ici)

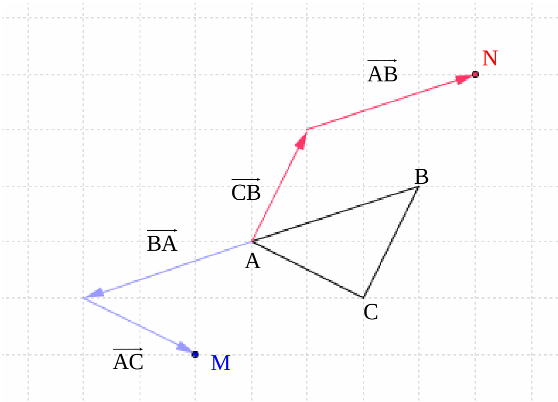
Il faut à tout prix laisser les marques de construction c'est-à-dire les vecteurs mis bout à bout (remarque valable pour les exercices $\boxed{12}$, $\boxed{13}$, $\boxed{14}$.

12 **Constructions de points définies par des égalités vectorielles**

Il s'agit d'un exercice de construction.

1ère méthode : sans transformer les égalités vectorielles qui définissent les points M et N

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$



2e méthode : préférable

On peut remarquer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ d'après la relation de Chasles.

Donc AMCB est un parallélogramme.

On utilise la construction du quatrième sommet d'un parallélogramme.

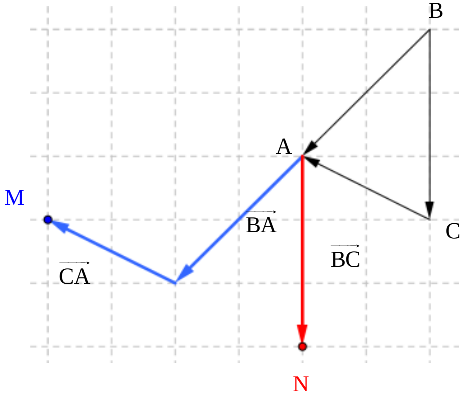
13 **Constructions de points**

Il s'agit d'un exercice de construction.

On est obligé de commencer à transformer les égalités vectorielles pour pouvoir construire les points M et N.

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ soit $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

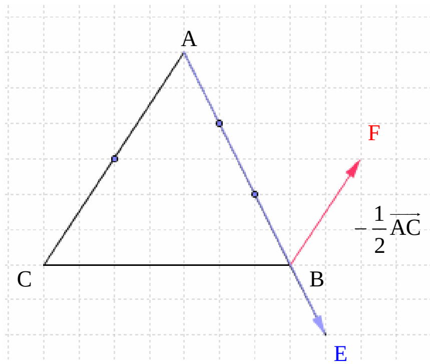


14 **Construction de points**

Il s'agit d'un exercice de construction.

$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



On utilise le quadrillage pour le partage du segment [AC] en 2 et le partage du segment [AB] en 3.

Pour le point E :

On a : $\begin{cases} AE = \frac{4}{3}AB \\ (AE)//(AB) \\ [AE) \text{ et } [AB) \text{ sont de même sens} \end{cases}$.

Ensuite, on fait des « marques » sur le segment $[AB]$ pour montrer la division en 3.

Ne pas expliquer avec des mesures de la règle la construction graphique (géométrique) à car c'est faux.

Cours particulier le 21-1-2016 avec Aymeric Valette

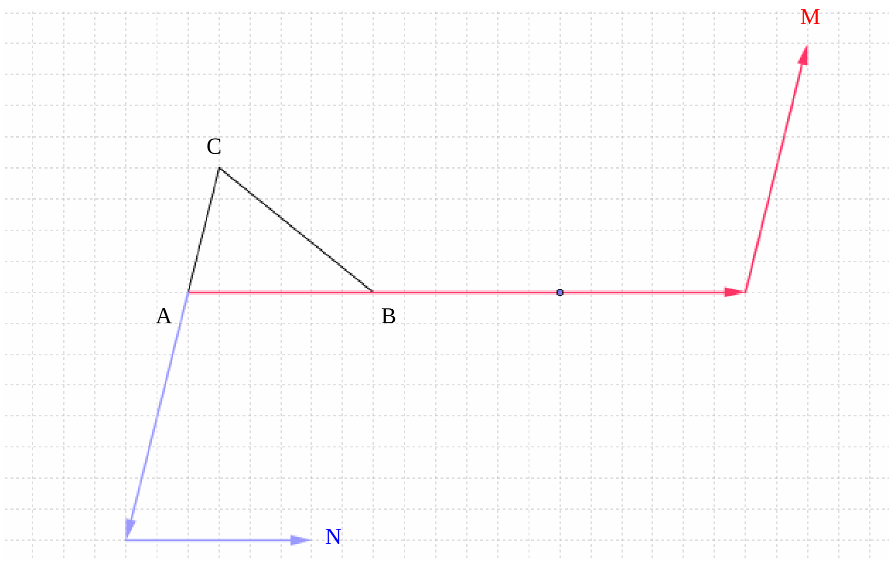
C'est précis si on choisit AB de telle sorte que l'on puisse diviser en 3 facilement grâce aux carreaux.

$\boxed{15}$ Constructions de points

Il s'agit d'un exercice de construction.

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$



Il est inutile de construire les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$: cela rend la figure finale moins lisible.
Cependant si on les construit ce n'est pas faux.

En revanche, pour le point M on doit faire figurer les vecteurs $3\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AC}$ qui ont permis à la construction des points M et N.
On doit les garder sur la figure finale.

Autre méthode pour le point N (intérêt moyen) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\\ &= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$\boxed{16}$

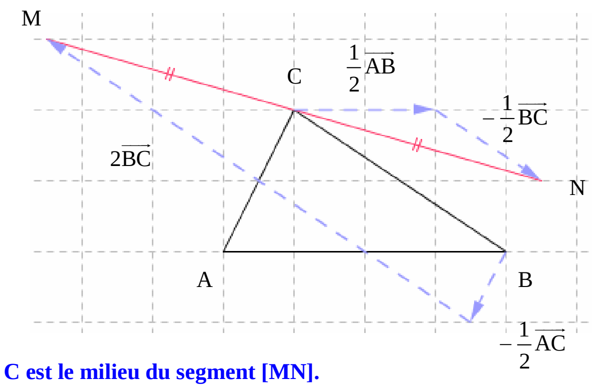
Hypothèses :

ABC : triangle quelconque

$\overrightarrow{BM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{NC} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (qui donne $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ dont on se sert pour la construction)

1°) **Construction des points M et N**



2°) **Démontrons que C est le milieu du segment [MN].**

(On démarre sèchement)

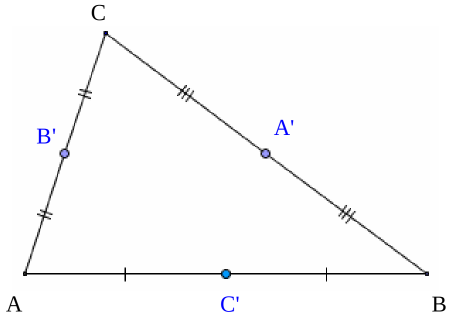
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} &= \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}\right) + \overrightarrow{CN} \quad \text{(relation de Chasles)}\\ &= \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \underbrace{-\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}_{\vec{0}}\right)\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

On en déduit que **C est le milieu du segment [MN]**.

17

ABC triangle quelconque
A' : milieu de [BC]
B' : milieu de [AC]
C' : milieu de [BA]

Figure :



Calculons la somme vectorielle $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

Il n'est pas nécessaire de représenter les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ sur la figure.

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}$ (relation de Chasles)

$$=\underbrace{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)}_{\vec{0}}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{AC'}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$ (car A', B', C' sont les milieux respectifs de [BC], [AC], [BA])

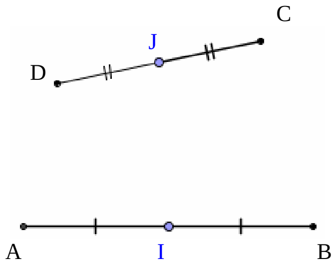
$$=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}_{\vec{0}}\right)$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}}$.

18

A, B, C, D : points quelconques du plan
I : milieu de [AB]
J : milieu de [CD]

On fait une figure codée.



Démontrons que l'on a : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$ (1) (relation de Chasles avec deux points : I et J)
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ (2)

On ajoute les égalités (1) et (2) membre à membre.

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$

$$=\left(\underbrace{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}}_{\vec{0}}\right)+2\overrightarrow{IJ}+\left(\underbrace{\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}\right)$$

car I milieu de [AB] car J milieu de [CD]

On obtient donc : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

19

M : point défini par $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (1)

1°) **Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.**

(1) donne successivement les égalités :

$2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$ (relation de Chasles)

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$5\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

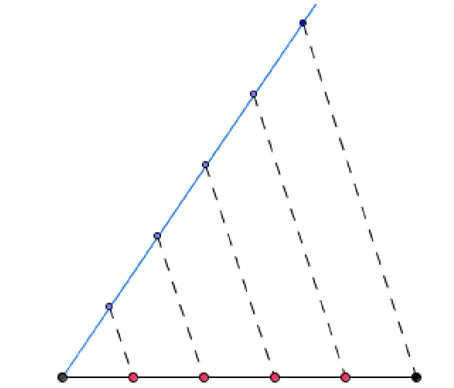
2°) **Construction de M.**

Sur quadrillage

Sur papier blanc

L'intérêt de la construction qui va suivre est de permettre la division du segment [AB] sans instrument de mesure.

Utilisation d'une demi-droite auxiliaire d'origine A.
On reporte 5 fois la même longueur sur cette demi-droite (à l'aide d'un écartement de compas ou à l'aide du quadrillage). On obtient une division régulière de cette demi-droite.
On joint le dernier point marqué à B.
On trace les parallèles à cette droite.
On obtient ainsi une division régulière du segment [AB] en cinq segments de même longueur.



Pour être bien faites, les parallèles doivent être faites à la règle et à l'équerre en faisant glisser une équerre le long d'une règle).
Il existe une autre construction utilisant 2 parallèles (« point divisant un segment dans un rapport donné »).

Remarque d'Amaury Lacaille le 14 septembre 2012 :

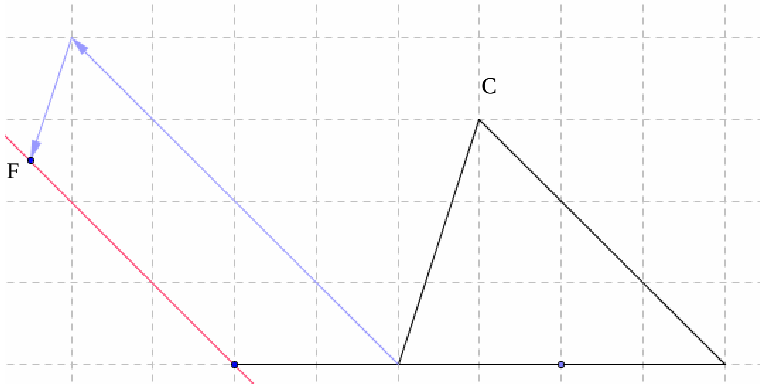
« Cette construction permet de diviser un segment en parts égales sans prendre en compte de mesure. »

Cette construction perme de diviser le segment en 5 segments de même longueur sans mesurer préalablement la longueur AB ni effectuer de division (pas de calcul).

$\boxed{20}$ **Parallélisme de droites**

ABC : triangle quelconque

1°) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2°) **Démontrons que (EF) et (BC) sont parallèles.**

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$ (forme soustractive de la relation de Chasles)

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$$

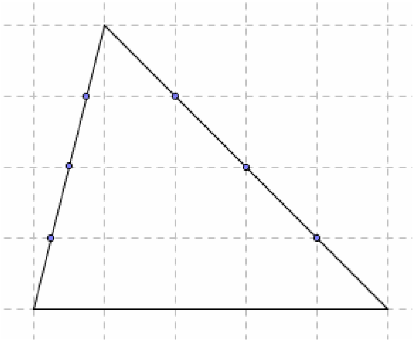
Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires.
Par conséquent, **(EF) // (BC)**.

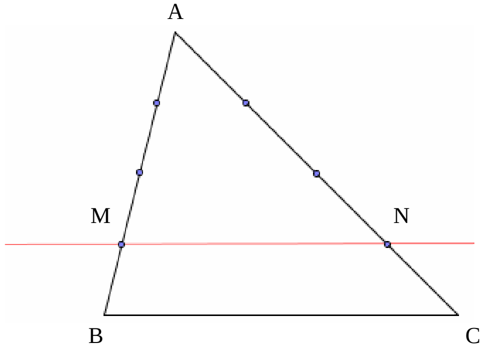
21 **Parallélisme de droites**

ABC : triangle quelconque

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$





Démontrons que (MN) / / (BC).

On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$ (forme soustractive de la relation de Chasles)

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

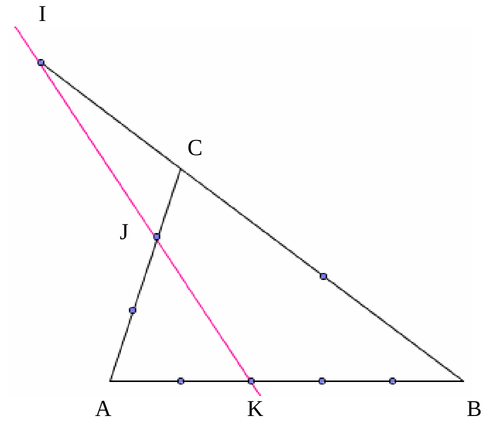
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires.
Par conséquent, **(MN) // (BC)**.

22 **Alignement de points**

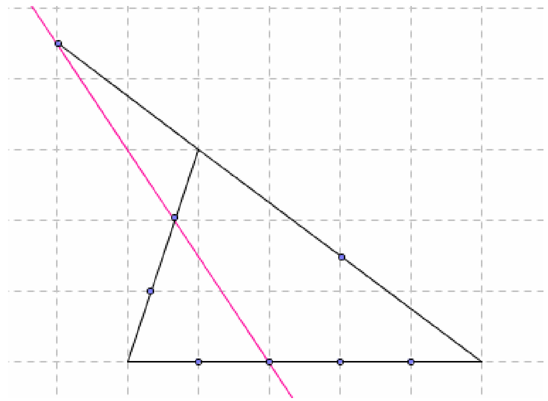
ABC : triangle quelconque

$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



Utilisation du quadrillage pour faire la figure :



1°) **Exprimons $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**

Quelques commentaires qui permettent de voir comment démarrer la décomposition :

On ne s'appuie pas sur la figure.
On s'appuie sur les hypothèses.
D'après les hypothèses, le point I est « relié » au point B et le point J est « relié » au point C donc on écrit la relation de Chasles en introduisant les points B et C.
On retiendra qu'on intègre les points en fonction des hypothèses.

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$ (relation de Chasles avec deux points : B et C)

$$\begin{aligned}
&=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\\
&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\\
&=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}}$$

2°) **Exprimons $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**

On écrit : $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IK}&=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\\
&=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\\
&=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\\
&=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\\
&=\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IK}=\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$$

3°) **Démontrons que les points I, J, K sont alignés.**

Méthode pour trouver au brouillon :

On écrit les coefficients des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{IJ}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$
$\overrightarrow{IK}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{2}$

On vérifie que c'est un tableau de proportionnalité en calculant les quotients.

$$\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{9}{10}\times 2=\frac{9}{5}$$

$$\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{6}}=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{9}{5}$$

On en déduit que $\overrightarrow{IK}=\frac{9}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Méthode au propre :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IK}&=\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\\
&=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\\
&=\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB}-\frac{5}{3}\overrightarrow{AC}\right) \quad \text{(il s'agit d'une « factorisation forcée du } \tfrac{3}{5} \text{ dans la parenthèse)}\\
&=\frac{9}{5}\overrightarrow{IJ}
\end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{IK}=\frac{9}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points I, J, K sont alignés.

$\boxed{23}$

ABCD : parallélogramme

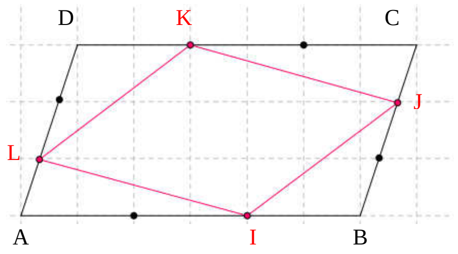
$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (1)

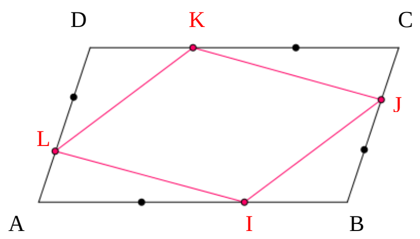
$\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (2)

$\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ (3)

$\overrightarrow{DL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ (4)

Figure :





On observera les marques que l'on fait figurer sur la figure pour montrer que l'on a partagé les côtés en trois segments de même longueur.

Démontrons que IJKL est un parallélogramme.

Méthode :

On démontre que deux vecteurs sont <u>ÉGAUX</u> : on peut par exemple prendre les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.
Il faut bien comprendre qu'il suffit de démontrer que ces deux vecteurs sont égaux (et non pas colinéaires) pour démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme (si l'on démontrait que ces deux vecteurs étaient colinéaires, on pourrait juste affirmer que IJKL est un trapèze).

On choisit deux vecteurs non colinéaires et l'on exprime les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction de ces deux vecteurs.
Un bon choix de vecteurs non colinéaire est $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
C'est un choix naturel (nous en verrons la raison dans le chapitre sur les coordonnées dans le plan) dans un parallélogramme ABCD.

Cependant, il y a plein d'autres choix possibles ; on peut par exemple choisir d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ce choix est cependant moins naturel).

La difficulté par rapport à la seconde réside dans le choix de ces deux vecteurs. En seconde, on donnait toujours les deux vecteurs ; il n'y avait pas de choix à faire.

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On effectue une décomposition des deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles.
On fait du calcul vectoriel.

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\underset{\overset{\uparrow}{(1)}}{\overrightarrow{AB}}+\overrightarrow{BJ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\underbrace{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\underset{\overset{\uparrow}{(2)}}{\overrightarrow{AD}}}_{(3)}$$

$$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

On en déduit que l'on a : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$.

Par suite, le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

Commentaires sur la 1ère égalité (en langage parlé) :

(1) On fait un Chasles à 2 points (« incrustation de 2 points »).
On se réfère aux hypothèses et non pas à la figure pour appliquer la relation de Chasles.
Le point I est « raccroché » au point A.
Le point J est « raccroché » au point B.
Donc on va introduire les points A et B

(2) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

(3) Il faut bien avoir conscience que l'on a terminé ici : on a bien exprimé le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
Il ne faut pas continuer à décomposer les vecteurs avec la relation de Chasles ; sinon on peut continuer longtemps en tournant en rond !

(4) On essaie d'écrire le moins de calcul possible (on cherche la concision).

Pour aller plus loin : en regardant la figure, quelles questions peut-on se poser ?

On peut par exemple chercher quel est le centre du parallélogramme IJKL.
On peut alors observer sur la figure que le centre de IJKL est confondu avec celui de ABCD.

Un exercice intéressant consiste à démontrer cette conjecture.

On pourrait aussi démontrer que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL}$ (mais ce serait trop long donc on évite cette méthode).

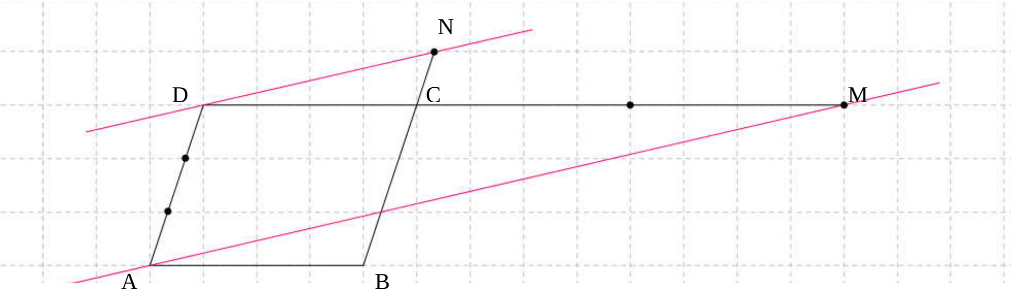
24 **Parallélisme de droites**

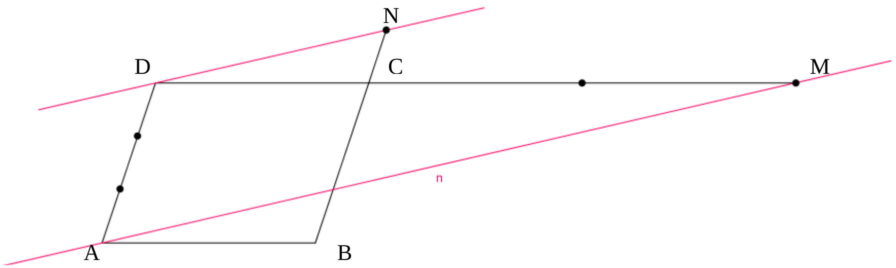
ABCD parallélogramme

$\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Démontrons que (AM) // (DN).





D'après la relation de Chasles, on : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$.

Or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Par suite, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$.

Or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Par suite, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

On constate que l'on a : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{DN}$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires.

On en déduit que **(DN) // (AM)**.