

1) 1°) Le nombre $11^4 - 2^4$ est-il un multiple de 117 ?

2°) Sans calcul, ni calculatrice, expliquer pourquoi 23 375 427 n'est pas divisible par 1 132.

2

3) \overline{xyz} désigne l'entier naturel dont l'écriture en base dix est formée des chiffres x, y et z . x est le chiffre des centaines, y celui des dizaines, z celui des unités. On a donc $\overline{xyz} = x \times 10^2 + y \times 10 + z$.

Exemple : $324 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 4$ (décomposition en base dix de 324)

1°) Soit a un entier naturel compris entre 0 et 9 (au sens large).

Écrire sous la forme d'une égalité la décomposition en base dix du nombre $\overline{1a5a}$ en fonction de a et réduire le résultat.

2°) Les entiers naturels de la forme $\overline{a0a}$ où a est un entier compris entre 1 et 9 au sens large sont tous divisibles par un entier naturel autre que 1 qui ne dépend pas de a . Lequel ?

4) Jacques tape trois fois le même chiffre à l'écran de sa calculatrice.

1°) Démontrer que le nombre obtenu est un multiple de 111.

2°) Est-ce un multiple de 37 ?

5) Déterminer le(s) entier(s) relatif(s) n tel(s) que $n + 7$ divise 15.

Les exercices 6 à 11 seront faits en classe.

6) Le but de l'exercice est de déterminer le(s) entier(s) relatif(s) n qui divise(nt) $n + 1$ par trois méthodes différentes. On cherchera les trois méthodes car elles présentent toutes un intérêt.

• 1^{ère} méthode : Utilisation de la propriété « Si un entier divise deux entiers, alors il divise leur différence ».

On raisonne par sens direct et sens réciproque.

Soit n un entier relatif tel que n divise $n + 1$.

On sait que n divise également n (évident, tout entier relatif lui-même).

On peut donc dire que n divise $(n + 1) - n$ donc 1.

... (poursuivre)

En déduire les valeurs possibles de n .

Effectuer une vérification et conclure.

• 2^e méthode : Utilisation de la définition de « a divise b ».

Soit n un entier relatif quelconque.

n divise $n + 1 \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $n + 1 = kn$

\Leftrightarrow il existe un entier relatif k tel que ...

\Leftrightarrow ...

On raisonne par équivalences.

• 3^e méthode : Utilisation du lemme faisant intervenir quatre entiers relatifs a, b, c, d tels que $a = bc + d$.

Soit n un entier relatif quelconque.

On écrit $n + 1 = n \times 1 + 1$.

On raisonne par équivalences.

Lemmes autour d'une égalité de la forme $a = bc + d$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs :

Lemme 1 :

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

Si a divise b , alors a divise d .

Lemme 2 :

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

b divise a si et seulement si b divise d .

Lemme 1 :

Il s'agit d'une implication.

Lemme 2 :

Il s'agit d'une équivalence.

n divise $n + 1 \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow

\Leftrightarrow

7 Le but de l'exercice est de déterminer le(s) entier(s) relatif(s) n tel(s) que $3n+4$ divise $n+6$.

On pose $a=3n+4$ et $b=n+6$.

- Déterminer une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs non nuls dont le résultat soit une constante (indépendante de n). En déduire une égalité de la forme $a=bc+d$ où c et d sont des entiers relatifs.

- En utilisant le lemme 1, déterminer les valeurs possibles de n .

- Étudier si ces valeurs de n conviennent.

- Conclure.

8 En utilisant la même méthode qu'à l'exercice précédent, déterminer le(s) entier(s) naturel(s) n tel(s) que $14n+8$ est divisible par $3n+5$.

On posera $a=3n+5$ et $b=14n+8$.

9 Le but de l'exercice est de déterminer le(s) entier(s) relatif(s) n tel(s) que $n-4$ divise $3n+24$.

On pose $a=3n+24$ et $b=n-4$.

- Déterminer une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs non nuls dont le résultat soit une constante (indépendante de n). En déduire une égalité de la forme $a=bc+d$ où c et d sont des entiers relatifs.

- Résoudre l'exercice en utilisant le lemme de divisibilité pour une égalité de ce type.

On raisonnera sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

10 En utilisant la même méthode que dans l'exercice précédent, déterminer les entiers naturels n tels que n^2+3n+1 soit divisible par $n-1$.

On posera $a=n^2+3n+1$ et $b=n-1$.

11 Déterminer les entiers relatifs n tels que $\frac{2n^2-n-6}{n+3}$ soit un entier.

12 Nombres parfaits

Un entier naturel est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même.

On ne prend pas 1 car 1 a un seul diviseur positif, à savoir lui-même, donc pas de diviseur positif autre que lui-même.

Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.

Ce sont les seuls nombres parfaits inférieurs à 100.

Note : Les nombres parfaits sont rares. Il n'en existe que trois inférieurs à 1000 : 6, 28 et 496.

Le 14 décembre 2022

Les nombres presque parfaits

Les exercices **13** et **14** seront traités après le cours sur la récurrence.

13 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , n^3-n est un multiple de 3.

14 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $3^{2^n}-4^n$ est un multiple de 5.

15 Dans tout l'exercice, n désigne un entier relatif quelconque.

Dans chaque cas, démontrer en utilisant une combinaison linéaire que les entiers a et b sont premiers entre eux.

1°) $a=n$ et $b=2n+1$; 2°) $a=2n+1$ et $b=6n+4$; 3°) $a=2n+3$ et $b=3n+5$.

16 Soit a et b deux entiers relatifs quelconques.

En utilisant les égalités $a+2b=(a+b)\times 1+b$ (1) et $a+b=b\times 1+a$ (2), démontrer grâce au lemme d'Euclide que $\mathcal{D}(a+b)\cap\mathcal{D}(a+2b)=\mathcal{D}(a)\cap\mathcal{D}(b)$.

17 Démontrer que pour tout entier relatif pair n , le nombre $N=n(n^2+20)$ est divisible par 8.

Indication : Tout entier relatif pair peut s'écrire $n=2p$ avec p entier relatif.

Pour aller plus loin : Démontrer que pour tout entier relatif pair n , le nombre N est divisible par 16.

18 On considère deux urnes A et B. On dispose de N boules numérotées de 1 à N avec N entier naturel tel que $N\geq 1$. Au départ (à l'étape 0), les N boules sont dans l'urne A.

À chaque étape, on choisit un entier naturel compris entre 1 et N et l'on change d'urne la boule portant le numéro tiré. Par exemple, si on a choisi le nombre 4, on change la boule portant le numéro 4 d'urne (si la boule 4 est dans l'urne A, on la retire de l'urne A et on la met dans l'urne B ; si la boule 4 est dans l'urne B, on la retire de l'urne B, et on la met dans l'urne A).

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de boules contenues dans l'urne A au bout de n étapes.

Déterminer la parité de u_n .

19 Soit n un entier naturel. Déterminer le chiffre des unités de l'écriture en base dix de $n!$.

20 Recopier et compléter les égalités :

$$1=1$$

$$1+3=\dots$$

$$1+3+5=\dots$$

$$1+3+5+7=\dots$$

$$1+3+5+7+9=\dots$$

Conjecturer une formule pour la somme des n premiers entiers naturels impairs, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Démontrer cette conjecture.

21 Démontrer que le nombre $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Démontrer que $\log 2$ est irrationnel.

24 Déterminer le chiffre x tel que l'entier $\overline{53x4}$ soit divisible par 9.

25 Déterminer les chiffres x et y tels que l'entier $\overline{3x2y}$ soit divisible par 4 et 3.

1. Factorielle d'un entier naturel

• Définition :

On définit la **factorielle** d'un entier naturel $n \geq 2$ de la manière suivante :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n \quad (\text{on lit « factorielle de } n \text{ »}).$$

Par convention, on pose $0! = 1$ et $1! = 1$.

• Exemple :

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

• Autre écriture :

$$n! = \prod_{k=1}^{k=n} k$$

Il s'agit d'un cas particulier d'utilisation du symbole \prod pour désigner un produit.

• Calculatrice :

On peut obtenir la factorielle d'un entier sur calculatrice.

Sur calculatrice Numworks, aller dans Boîte à outils puis Probabilités puis Dénombrement.

Sur calculatrice TI, $\boxed{\text{math}}$ sélectionner PROB puis 4.

Il est à noter que la calculatrice ne sait plus calculer à partir de $70!$ (dépassement de capacités).

• Propriété immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)! = n \times (n+1)$$

Il s'agit d'une relation fondamentale.

Cette formule permettrait de définir la factorielle d'un entier à l'aide d'une suite.

Mots croisés mathématiques

Tous les nombres considérés sont des entiers naturels non nuls.

	A	B	C	D	E
1					
2					■
3				■	
4					
5		■			

Horizontalement :

1. Carré parfait dont le produit des chiffres est 756.
2. Le nombre formé de ses deux premiers chiffres est le même que celui formé de ses deux derniers chiffres.
3. Multiple de 139. Reste de la division euclidienne de 2001 par 9.
4. Permutation de 23444.
5. Carré parfait. Le produit de ses chiffres est 392.

Verticalement :

- A. La somme de ses chiffres est 35.
- B. Entier divisible par 11.
- C. Nombre palindrome (qui se lit aussi bien à l'endroit qu'à l'envers).
- D. Nombre premier. Cube parfait.
- E. Entier naturel admettant un seul diviseur positif. Le produit de ses chiffres est 72 et seul son dernier chiffre est pair.

Corrigé

Dans les exercices, on donne les ensembles de diviseurs sans explication.

1

1°) **Déterminons si le nombre $11^4 - 2^4$ est un multiple de 117.**

• Avec calculatrice :

$$11^4 - 2^4 = 14\,625 = 117 \times 125 \text{ donc } 117 \mid 11^4 - 2^4.$$

On en déduit que $11^4 - 2^4$ est un multiple de 117.

• Sans calculatrice :

On cherche à factoriser (et non à développer !) l'expression du nombre.

$$11^4 - 2^4 = (11^2)^2 - (2^2)^2 = (11^2 - 2^2)(11^2 + 2^2) = (121 - 4)(121 + 4) = 117 \times 125 \quad (\text{on factorise } 11^4 - 2^4)$$

étape indispensable pour bien comprendre la factorisation

D'après cette dernière égalité, $11^4 - 2^4$ est un multiple de 117.

On peut dire également que 117 et 125 sont des « diviseurs associés » de $11^4 - 2^4$.

Autre méthode :

$$11^4 - 2^4 = (11^2)^2 - (2^2)^2 \text{ et propriété du cours } a^n - b^n \text{ est divisible par } a - b.$$

Autre méthode due à Théo Spriet (élève de TS1) le 3-9-2015 :

On peut écrire $11^4 - 2^4 = (11 - 2)(11^3 + 11^2 \times 2 + 11 \times 2^2 + 2^3)$ d'après la relation fondamentale de l'algèbre.

Cependant, cette dernière égalité ne permet pas de conclure directement.

Solution de Diane Schneider TS1 le mercredi 7-9-2016 :

$$\frac{11^4 - 2^4}{117} = 125 \text{ donc } 11^4 - 2^4 \text{ est un multiple de 117 donc } 117 \mid 11^4 - 2^4.$$

2°) **Expliquons pourquoi 23 375 427 n'est pas divisible par 1 132.**

On effectue un raisonnement par l'absurde (d'où l'emploi du conditionnel).

2 | 1 132

Si 1 132 divisait 23 375 427, alors par transitivité, 2 diviserait 23 375 427 ce qui est faux.

Donc 23 375 427 n'est pas divisible par 1 132.

Autre raisonnement :

1 132 est un nombre pair donc si un nombre est divisible par 1 132, alors ce nombre est pair.

Or 23 375 427 est impair donc 23 375 427 n'est pas divisible par 1 132.

Autre formulation de ce raisonnement due à Théo Spriet (élève de TS1) le 3-9-2015 :

23 375 427 n'est pas divisible par 1 132 car 1 132 est pair et pas 23 375 427.

Version proposée le jeudi 14 septembre 2017

2 | 1132 mais $2 \nmid 23\,375\,427$

On conclut grâce à la propriété de transitivité de la relation de divisibilité (« si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$ »).

Version Joséphine Brami (le 9-9-2015) :

1°)

$$11 - 2 \mid 11^4 - 2^4 \Leftrightarrow 11^2 - 2^2 \mid 11^4 - 2^4$$

$$11 - 2 \mid 11^4 - 2^4 \Leftrightarrow 121 - 4 \mid 11^4 - 2^4$$

$$11 - 2 \mid 11^4 - 2^4 \Leftrightarrow 117 \mid 11^4 - 2^4$$

2°) 2 divise 1132. Donc si 23 375 427 était un multiple de 1132 alors 2 diviserait 23 375 427.

Or ce n'est pas le cas.

Solution d'Elisa Indych (TS3) le lundi 12-9-2016

$$1°) \frac{11^4 - 2^4}{117} = 125$$

Donc $11^4 - 2^4$ est divisible par 117.

Donc $11^4 - 2^4$ est un multiple de 117.

2°) $2 + 3 + 3 + 7 + 5 + 4 + 2 + 7 = 33$ et $1 + 1 + 3 + 2 = 7$.

Donc 23 375 427 n'est divisible ni par 2, 3, 5 ou 9 tout comme 1132. Les 2 nombres n'ont pas de diviseurs communs.

2

3

On pourrait noter $\overline{324}$ en système décimal mais on ne le fait pas d'ordinaire.

La barre ne veut pas dire « contraire ».

L'écriture \overline{xyz} désigne le nombre formé des chiffres x, y, z (x : chiffres des centaines, y : chiffres des dizaines, z : chiffre des unités).

La barre sert à ne pas confondre avec le produit xyz .

1°) **Écrivons le nombre $\overline{1a5a}$ en fonction de a .**

On utilise la décomposition en base dix du nombre en utilisant le principe rappelé pour un entier à trois chiffres et généralisable à des entiers naturels dont l'écriture en base dix comprend un nombre quelconque de chiffres.

$$\begin{aligned}\overline{1a5a} &= 1 \times 10^3 + a \times 10^2 + 5 \times 10 + a \\ &= 1000 + 100a + 50 + a \\ &= 1050 + 101a\end{aligned}$$

Ancienne version : $\overline{1a5a} = a + 5 \times 10 + a \times 100 + 1000 = 1050 + 101a$

Version Joséphine Brami (le 9-9-2015) :

$$\begin{aligned}\overline{1a5a} &= 1000 + a \times 100 + 50 + a \\ &= 1050 + 101a\end{aligned}$$

2°) $1 \leq a \leq 9$

Démontrons que tous les nombres de la forme $\overline{a0a}$ sont divisibles par un entier naturel autre que 1.

1^{ère} méthode : On teste tous les cas (il y a 9 cas à examiner)

Cette méthode est un peu fastidieuse. Il est préférable de l'éviter.

2^e méthode : On utilise la décomposition en base 10.

$$\begin{aligned}\overline{a0a} &= a \times 10^2 + 0 \times 10 + a \\ &= 100a + a \\ &= 101 \times a\end{aligned}$$

Comme $a \in \mathbb{N}$, cette dernière égalité prouve que **le nombre $\overline{a0a}$ est divisible par 101.**

Version de Joséphine Brami (9-9-2015) :

$$\begin{aligned}\overline{a0a} &= 101a \\ \text{Donc } 101 &| \overline{a0a} = 101a.\end{aligned}$$

4

Soit x le chiffre tapé ($x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 9$).

Le nombre obtenu en tapant trois fois le chiffre x sur la calculatrice est $N = \overline{xxx}^{(dix)}$.
On peut dire aussi que c'est le résultat obtenu en tapant trois fois le chiffre x sur la calculatrice.

On a : chiffre de centaines = chiffre des dizaines = chiffre des unités.

1°) **Démontrons que 111 est un diviseur de N .**

Première méthode :

Les nombres tapés possibles sont 000, 111, 222, ...
On teste chacun de ces nombres.
Il est quasiment évident que chacun de ces nombres est divisible par 111.

Deuxième méthode : On utilise la décomposition en base dix.

On a : $N = 100x + 10x + x = 111x$.

Cette égalité est quasiment évidente.

$x \in \mathbb{N}$ donc $111 | N$.

2°) **Démontrons que 37 est un diviseur de N .**

On a : $111 = 3 \times 37$ donc $37 | 111$.

Or $111 | N$ donc par transitivité de la divisibilité, $37 | N$.

Donc 37 est un diviseur de 111.

Version de Joséphine Brami (9-9-2015) :

Soit a le chiffre tapé.

1°)

$$\begin{aligned}\overline{aaa} &= 100a + 10a + a \\ \overline{aaa} &= 111a\end{aligned}$$

2°)

$$37 | 111 \text{ et } 111 | \overline{aaa} \text{ donc } 37 | \overline{aaa}.$$

5

Déterminons les entiers relatifs n tels que $n+7 \mid 15$ (1).

Les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5, 15, -1, -3, -5, -15.

Donc

$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow & \begin{cases} n+7=1 \\ \text{ou} \\ n+7=3 \\ \text{ou} \\ n+7=5 \\ \text{ou} \\ n+7=15 \\ \text{ou} \\ n+7=-1 \\ \text{ou} \\ n+7=-3 \\ \text{ou} \\ n+7=-5 \\ \text{ou} \\ n+7=-15 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} n=-6 \\ \text{ou} \\ n=-4 \\ \text{ou} \\ n=-2 \\ \text{ou} \\ n=8 \\ \text{ou} \\ n=-8 \\ \text{ou} \\ n=-10 \\ \text{ou} \\ n=-12 \\ \text{ou} \\ n=-22 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les entiers relatifs n cherchés sont : -6, -4, -2, 8, -8, -10, -12, -22.

Remarque :

Il n'y a pas besoin de faire de vérification car on a raisonné par équivalences.

Autre rédaction possible :

$$\mathcal{D}(15) = \{1, 3, 5, 15, -1, -3, -5, -15\}$$

$$\begin{aligned}
(1) & \Leftrightarrow n+7 \in \mathcal{D}(15) \\
& \Leftrightarrow \dots
\end{aligned}$$

6

Déterminons les entiers relatifs n qui divisent $n+1$.

Il faut bien comprendre la question.

On cherche à déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n \mid n+1$ et non à savoir si $n \mid n+1$.

On peut deviner facilement que 1 et -1 vérifie la condition demandée.

On peut chercher s'il existe d'autres valeurs de n vérifiant la condition grâce à la calculatrice en rentrant la

fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x}$.

Nous allons démontrer que 1 et -1 sont les seules valeurs de n vérifiant la condition.

Il y a 3 méthodes pour résoudre cet exercice.

Il est demandé d'étudier et de noter ces 3 méthodes.

Méthode 1 : Utilisation de la propriété des combinaisons linéaires à coefficients entiers

Avec cette méthode, la résolution de cet exercice s'effectue en deux parties.

1^{ère} partie : raisonnement déductif (on cherche les valeurs possibles de n)

2^e partie : vérification (on examine si chacune des 2 valeurs convient)

Il faut vraiment bien comprendre la « logique » de cette démarche, en particulier, la nécessité d'une vérification.

1^{ère} partie :

Soit n un entier relatif tel que $n \mid n+1$.

$n \mid n$ et $n \mid n+1$ donc n divise toute combinaison linéaire de n et de $n+1$ à coefficients entiers relatifs.

En particulier, n divise la différence de ces deux nombres.

$n \mid (n+1) - n$ donc $n \mid 1$.

Les diviseurs de 1 sont -1 et 1.

Si l'on préfère, au lieu de faire une phrase, on peut écrire l'égalité d'ensembles : $\mathcal{D}(1) = \{1; -1\}$.

D'où $n=1$ ou $n=-1$.

2^e partie : vérification obligatoire

Réciproquement, ces deux valeurs conviennent de manière évidente car 1 et -1 divisent tous les entiers relatifs.

Mauvaise solution mais qui peut être utile dans d'autres situations :

Réciproquement, on vérifie que ces deux valeurs conviennent.

Si $n=1$, alors $n+1=2$.
On a bien : $1 \mid 2$.

Si $n=-1$, alors $n+1=0$.
On a bien : $-1 \mid 0$.

Les entiers relatifs n cherchés sont 1 et -1 .

Si on dit que n divise la somme c'est-à-dire $2n+1$, cela ne conduirait à rien.
Le but c'est que les n s'annulent.

Méthode 2 : Utilisation de la définition de a divise b

Si $n \mid n+1$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n+1=k \times n$ donc $1=(k-1)n$ d'où n divise 1.

Par suite, $n=1$ ou $n=-1$.

Ces deux valeurs conviennent de manière évidente car 1 et -1 divisent tous les entiers relatifs.

Les entiers relatifs n cherchés sont 1 et -1 .

Méthode 3 : Utilisation du lemme $a=bc+d$

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a=bc+d$.

b divise $a \Leftrightarrow b$ divise d .

Avec cette méthode, la résolution de cet exercice s'effectue par équivalences.
Il n'y a pas de vérification à effectuer d'où l'efficacité de cette méthode.

On a : $n+1=n \times 1+1$.

Cette égalité ne fait intervenir que des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} n \mid n+1 &\Leftrightarrow n \mid 1 \\ &\Leftrightarrow n=1 \text{ ou } n=-1 \end{aligned}$$

Les entiers relatifs n cherchés sont 1 et -1 .

Méthode 4 :

D'après le cours, pour tout entier relatif n , n et $n+1$ sont premiers entre eux.

Un raisonnement simple permet d'en déduire que les seules valeurs de n pour lesquelles $n \mid n+1$ sont 1 et -1 .

Version fausse (Joséphine Brami le 9-9-2015)

$$n \mid n+1 \Leftrightarrow n \mid (n+1)-n$$

$$n \mid n+1 \Leftrightarrow n \mid 1$$

$$n \mid n+1 \Leftrightarrow n=1 \text{ ou } n=-1$$

7

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$a = n + 6$$

$$b = 3n + 4$$

L'exercice comporte plusieurs étapes à bien différencier.

• Déterminer une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs non nuls dont le résultat soit une constante (indépendante de n). En déduire les valeurs possibles de n .

• Étudier si ces valeurs de n conviennent.

• Conclure.

• Déterminer une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs non nuls dont le résultat soit une constante (indépendante de n). En déduire les valeurs possibles de n .

• Étudier si ces valeurs de n conviennent.

• Conclure.

Déterminons les entiers relatifs n tels que $3n+4 \mid n+6$.

On peut commencer par chercher quelques valeurs de n vérifiant la condition grâce à la calculatrice en rentrant la fonction $x \mapsto \frac{x+6}{3x+4}$.

Le lundi 29-11-2021

[7] lemme $a = bc + d$ pas possible lettres dans le mauvais ordre

On pose $a = n + 6$ et $b = 3n + 4$.

• Déterminer une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs non nuls dont le résultat soit une constante (indépendante de n). En déduire les valeurs possibles de n .

On pose $a = 3n + 4$ et $b = n + 6$.

$$3b - a = 3(n + 6) - (3n + 4) = 14$$

L'expression $3b - a$ est une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs (expression de la forme $ua + vb$ avec $\lambda = -1$ et $\mu = 3$).

Soit n un entier relatif tel que $a \mid b$.

On a : $a \mid a$ et $a \mid b$ donc a divise toute combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.

On applique la propriété du cours :

(5) **Propriété fondamentale**

Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors a divise toute **combinaison linéaire** de b et c à coefficients entiers.

En particulier, $a \mid 3b - a$ c'est-à-dire $a \mid 14$.

Raccourci 1^{er} décembre 2021 :

On a $a = 3b - 14$.

On cherche les entiers relatifs a tels que a divise b (1).

Comme on a une égalité de la forme $a = bc + d$, on peut dire que (1) entraîne a divise 14.

Les diviseurs de 14 sont 1, 2, 7, 14, -1, -2, -7, -14 (on donne ces diviseurs sans explication).

Donc $a = 1$ ou $a = 2$ ou $a = 7$ ou $a = 14$ ou $a = -1$ ou $a = -2$ ou $a = -7$ ou $a = -14$.

On peut utiliser des traits ondulés.

D'où

$3n = -3$ (1) ou $3n = -2$ (2) ou $3n = 3$ (3) ou $3n = 10$ (4) ou $3n = -5$ (5) ou $3n = -6$ (6) ou $3n = -11$ (7) ou $3n = -18$ (8)

(1) donne $n = -1$

(3) donne $n = 1$

(6) donne $n = -2$

(8) donne $n = -6$

Les équations (2), (4), (5), (7) n'ont pas de solutions dans \mathbb{Z} .

Les valeurs de n trouvées sont $-1, 1, -2$ et -6 .

• Étudier si les valeurs possibles de n conviennent.

Vérification obligatoire (donc à écrire)

On regarde pour les différentes valeurs de n trouvées si a divise b .

Pour $n = -1$, $a = 1$ et $b = 5$. On a : $1 \mid 5$. Donc cette valeur convient.

Pour $n = 1$, $a = 7$ et $b = 7$. On a : $7 \mid 7$. Donc cette valeur convient.

Pour $n = -2$, $a = -2$ et $b = 4$. On a : $-2 \mid 4$. Donc cette valeur convient.

Pour $n = -6$, $a = -14$ et $b = 0$. On a : $-14 \mid 0$. Donc cette valeur convient.

• Conclure.

Conclusion : Les entiers n cherchés sont $-1, 1, -2$ et -6 .

On a raisonné d'abord par implication dans un sens. On doit faire une vérification.

On peut présenter les résultats dans un tableau comme ci-dessous.

n	$3n + 4$	$n + 6$	$3n + 4 \mid n + 6$
-1	1	5 (calcul inutile)	V
1	7	7	V
-2	-2	4	V
-6	-14 (calcul inutile)	0	V

On ne peut pas utiliser le lemme $a = bc + d$ pour résoudre cet exercice par équivalences.

Version Joséphine Brami (le 9-9-2015) un tout petit peu arrangée car Joséphine n'avait pas donné de numéros aux différentes équations :

$3n+4=1$ (1) ou $3n+4=2$ (2) ou $3n+4=7$ (3) ou $3n+4=14$ (4) ou $3n+4=-1$ (5) ou $3n+4=-2$ (6) ou $3n+4=-7$ (7) ou $3n+4=-14$ (8)

(1) $\Leftrightarrow n = -1$

(2) $\Leftrightarrow n = -\frac{2}{3}$

(3) $\Leftrightarrow n = 1$

(4) $\Leftrightarrow n = \frac{10}{3}$

(5) $\Leftrightarrow n = -\frac{5}{3}$

(6) $\Leftrightarrow n = -2$

(7) $\Leftrightarrow n = -\frac{11}{3}$

(8) $\Leftrightarrow n = -3$

8

$n \in \mathbb{N}$
 $a = 3n + 5$
 $b = 14n + 8$

Déterminons les entiers naturels n tels que $a \mid b$.

• On commence par déterminer une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs non nuls dont le résultat soit une constante (indépendante de n).

$$14a - 3b = 14(3n+5) - 3(14n+8) = \dots = 46$$

On peut indifféremment faire la combinaison linéaire $14a - 3b$ ou $3b - 14a$.
Les diviseurs positifs de 46 sont les mêmes que ceux de -46 .

On cherche les entiers naturels n tels que $a \mid b$ (1).

(1) $\Rightarrow a \mid 46$ (1') [attention, il n'y a pas d'équivalence]

En effet, comme $a \mid a$, a divise toute combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.

Or, n est un entier naturel, donc a et b sont aussi des entiers naturels.
On cherche les diviseurs positifs de 46.

Les diviseurs positifs de 46 sont 1, 2, 23, 46.

On peut aussi écrire mathématiquement l'ensemble des diviseurs positifs de 46 : $\mathcal{D}^+(46) = \{1, 2, 23, 46\}$.

« Après, on va faire le tri », « en fonction de ceux qui sont positif ou négatifs ».

• On en déduit alors les valeurs possibles de n .

(1') $\Rightarrow a = 1$ (α) ou $a = 2$ (β) ou $a = 23$ (γ) ou $a = 46$ (δ)

(α) $\Leftrightarrow 3n = -4$ (impossible pour $n \in \mathbb{N}$)

(β) $\Leftrightarrow 3n = -3$ (impossible pour $n \in \mathbb{N}$)

(γ) $\Leftrightarrow 3n = 18$

$\Leftrightarrow n = 6$

(δ) $\Leftrightarrow 3n = 41$ (impossible pour $n \in \mathbb{N}$, car 41 n'est pas divisible par 3)

Les équations (α), (β), (δ) n'ont pas de solutions dans \mathbb{N} (par exemple, pour (δ), 3 n'est pas un diviseur de 41)

La seule valeur possible de n est 6.

• On regarde si cette valeur de n convient.

Pour $n = 6$, $a = 3 \times 6 + 5 = 23$ et $b = 14 \times 6 + 8 = 92$.

Or $23 \mid 92$.

Donc la valeur 6 convient.

Conclusion : L'entier naturel n cherché est 6.

9

n est un entier relatif.

$a = 3n + 24$

$b = n - 4$

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers relatifs n tels que $b \mid a$.

• On commence par écrire une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs dont le résultat soit un entier non nul indépendant de n .

On trouve aisément $a - 3b = 36$.

L'expression $a - 3b$ est de la forme $ua + vb$ avec $u = 1$ et $v = -3$. Il s'agit bien d'une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.

• On peut écrire $a = 3b + 36$. Il s'agit d'une égalité de la forme $a = bc + d$ avec $c = 3$ et $d = 36$.

• On cherche les entiers relatifs n tels que $b \mid a$ (1).

Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, -1, -2, -3, -4, -6, -9, -12, -18, -36.

$$(1) \Leftrightarrow b \mid 36 \quad (\text{utilisation du lemme } a = bc + d)$$

$$\Leftrightarrow b = 1 \text{ ou } b = 2 \text{ ou } b = 3 \text{ ou } b = 4 \text{ ou } \dots \quad (\text{il y a 18 égalités})$$

$$\Leftrightarrow n = 5 \text{ ou } n = 6 \text{ ou } n = 7 \text{ ou } n = 8 \text{ ou } \dots \quad (\text{il y a 18 égalités})$$

Les entiers n cherchés sont 5, 6, 7, 8, 10, 13, 16, 40, -2, -5, -8, -14, -32, 22, 3, 2, 1, 0.

Pas de vérification car on a procédé par équivalences.

10

Déterminons les entiers naturels n tels que le nombre $n^2 + 3n + 1$ soit divisible par $n - 1$.

On pose $a = n^2 + 3n + 1$ et $b = n - 1$.

On cherche les entiers naturels n tels que $b \mid a$ (1).

On commence par écrire une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs dont le résultat soit un entier non nul indépendant de n .

En cherchant un peu (voir autre méthode ci-dessous), on obtient $a - (n + 4)b = 5$.

L'expression $a - (n + 4)b$ est de la forme $ua + vb$ avec $u = 1$ et $v = -(n + 4)$. Il s'agit bien d'une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.

On peut écrire $a = (n + 4)b + 5$. Il s'agit d'une égalité de la forme $a = bc + d$ avec $c = n + 4$ et $d = 5$.

$$(1) \Leftrightarrow b \mid 5$$

$$\Leftrightarrow b = 1 \text{ ou } b = 5 \text{ ou } b = -1 \text{ ou } b = -5 \quad (\text{les diviseurs de 5 sont } 1, 5, -1 \text{ et } -5)$$

$$\Leftrightarrow n = 2 \text{ ou } n = 6 \text{ ou } n = 0 \text{ ou } n = -4 \quad (\text{impossible car } n \text{ est un entier naturel})$$

Les entiers n cherchés sont 0, 2 et 6.

Pas de vérification car on a procédé par équivalences.

On peut calquer la méthode pour effectuer une division euclidienne à la main (cf. chapitre suivant). Il s'agit en fait d'une division euclidienne de polynômes.

$$\begin{array}{r|l} n^2 + 3n + 1 & n - 1 \\ \hline n^2 - n & n + 4 \\ \hline 4n + 1 & \\ 4n - 4 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

11

On pose $a = 2n^2 - n - 6$ et $b = n + 3$.

On cherche les entiers relatifs n tels que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire tels que $b \mid a$ (1).

On peut noter que $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel pour tout entier relatif n différent de -3.

On commence par écrire une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs dont le résultat soit un entier non nul indépendant de n .

En cherchant un peu (voir autre méthode ci-dessous), on obtient $a - (2n - 7)b = 15$.

On peut écrire $a = (2n - 7)b + 15$. Il s'agit d'une égalité de la forme $a = bc + d$ avec $c = 2n - 7$ et $d = 15$.

$$(1) \Leftrightarrow b \mid 15$$

$$\Leftrightarrow b = 1 \text{ ou } b = -1 \text{ ou } b = 3 \text{ ou } b = -3 \text{ ou } b = 5 \text{ ou } b = -5 \text{ ou } b = 15 \text{ ou } b = -15$$

$$\Leftrightarrow n = -2 \text{ ou } n = -4 \text{ ou } n = 0 \text{ ou } n = -6 \text{ ou } n = 2 \text{ ou } n = -8 \text{ ou } n = 12 \text{ ou } n = -18$$

Les entiers relatifs n cherchés sont -2 ; -4 ; 0 ; -6 ; 2 ; -8 ; 12 ; -18.

Pas de vérification car on a procédé par équivalences.

12 Nombres parfaits

• Les diviseurs positifs de 6 sont : 1, 2, 3, 6.

On peut écrire l'égalité d'ensembles $\mathcal{D}^+(6) = \{1; 2; 3; 6\}$.

On a : $6 = 1 + 2 + 3$ donc 6 est nombre parfait.

• Les diviseurs positifs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28.

On peut écrire l'égalité d'ensembles $D^+(28) = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$.

On a : $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ donc 28 est un nombre parfait.

Contre-exemple : 30 n'est pas un nombre parfait.

Les diviseurs positifs de 30 sont : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

La somme des diviseurs stricts est égale à 42, ce qui est différent de 30.

- Pour 496, on utilise un logiciel de calcul formel ou un programme sur la calculatrice ou le site dcode.

$D^+(496) = \{1; 2; 4; 8; 16; 31; 62; 124; 248; 496\}$

Pour information :

Les cinq premiers nombres parfaits sont 6, 28, 496, 8 128 et 3 355 336.

Aujourd'hui, on ne sait toujours pas s'il en existe des impairs...

Jadis les nombres parfaits étaient considérés comme au-dessus de tous les autres. On leur prêtait une dimension mystique, comme saint Augustin (354-430) dans *La Cité de Dieu* [*De civitate Dei contra paganos*] (420 après Jésus-Christ) : « Six est un nombre parfait en lui-même, non parce que Dieu a créé toute chose en six jours, mais Dieu a créé toute chose en six jours parce que ce nombre est parfait ».

Pour en savoir plus sur les nombres parfaits, faire une recherche sur Wikipedia.

13

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $n^3 - n$ est divisible par 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $n^3 - n$ est divisible par 3 ».

- Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$$0^3 - 0 = 0$$

Or 0 est divisible par 3.

Donc on en déduit que $P(0)$ est vraie.

- Hérité :

Considérons un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie c'est-à-dire $k^3 - k$ est divisible par 3.

Démontrons qu'alors $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $(k+1)^3 - (k+1)$ est divisible par 3.

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= k^3 + 3k^2 + 2k\end{aligned}$$

Comme $P(k)$ est vraie, il existe un entier naturel q tel que $k^3 - k = 3q$ d'où $k^3 = k + 3q$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (3q+k) + 3k^2 + 2k \\ &= 3q + 3k + 3k^2 \\ &= 3(q+k+k^2)\end{aligned}$$

Comme $q+k+k^2$ est un entier naturel, on en déduit que $(k+1)^3 - (k+1)$ est divisible par 3.

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k alors $P(k+1)$ est vraie.

D'après le théorème de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Pour aller plus loin :

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $n^3 - n$ est divisible par 6.

14

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 4^n$ est un multiple de 5.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $5 \mid 3^{2n} - 4^n$ ».

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$$3^{2 \cdot 0} - 4^0 = 0 \text{ donc } P(0) \text{ est vraie}$$

Considérons un entier naturel k tel la phrase $P(k)$ est vraie c'est-à-dire $5 \mid 3^{2k} - 4^k$.

Démontrons qu'alors $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $5 \mid 3^{2(k+1)} - 4^{k+1}$.

Comme $P(k)$ est vraie, il existe un entier relatif q tel que $9^k - 4^k = 5q$.

On peut même dire que q est un entier naturel.

Comme $9^k - 4^k = 5q$, on peut écrire $9^k = 4^k + 5q$.

$$9^{k+1} - 4^{k+1} = 9^k \times 9 - 4^{k+1} = (4^k + 5q) \times 9 - 4^k \times 4 = 4^k \times (9-4) + 5 \times 9q = 5(4^k + 9q)$$

On pose $q' = 4^k + 9q$.

Comme $q \in \mathbb{Z}$, $q' \in \mathbb{Z}$. On a donc $5 \mid 9^{k+1} - 4^{k+1}$.

Donc $P(k+1)$ est vraie.

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k alors $P(k+1)$ est vraie.

D'après le théorème de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Autre façon : sans récurrence (donc ne répondant pas à la question)

On utilise la formule fondamentale de l'algèbre.

$$\begin{aligned}3^{2n} - 4^n &= 9^n - 4^n \\ &= (9 - 4)(9^{n-1} + 9^{n-2} \times 4 + \dots + 9 \times 4^{n-2} + 4^{n-1}) \\ &= 5k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Donc $3^{2n} - 4^n$ est un multiple de 5.

15

Rappel de définition :

On dit que deux entiers relatifs sont premiers entre eux lorsque leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1 .

Rappel de propriété (ou lemme) :

Si on peut trouver une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs égale à 1 ou à -1 , alors on peut affirmer que a et b sont premiers entre eux.

On utilise le lemme de la combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs égale à 1 ou à -1 .

Dans chaque cas, on cherche à former une combinaison linéaire non nulle à coefficients entiers de a et b dont le résultat soit indépendant de n . et même égal à 1 ou à -1 .

Pour cela, on cherche un peu. On applique une technique d'élimination ; on cherche à éliminer n entre a et b .

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$1^\circ) \quad a = n \quad b = 2n + 1$$

Démontrons que a et b sont premiers entre eux.

Il s'agit de trouver une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers égale à 1.

$$\begin{aligned}b - 2a &= 2n + 1 - 2n \\ &= 1\end{aligned}$$

La combinaison linéaire est choisie telle que les n s'annulent.

La dernière égalité prouve que a et b sont premiers entre eux (lemme).

$$2^\circ) \quad a = 2n + 1 \quad b = 6n + 4$$

Démontrons que a et b sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned}b - 3a &= 6n + 4 - 6n - 3 \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc a et b sont premiers entre eux.

$$3^\circ) \quad a = 2n + 3 \quad b = 3n + 5$$

Démontrons que a et b sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned}2b - 3a &= 6n + 10 - 6n - 9 \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc a et b sont premiers entre eux.

Dans chaque cas, on peut vérifier en donnant à n des valeurs (ce sont des cas particuliers).

16

$$a + 2b = (a + b) \times 1 + b \quad (1)$$

$$a + b = b \times 1 + a \quad (2)$$

Grâce au lemme d'Euclide, l'égalité (1) permet d'écrire l'égalité d'ensembles

$$\mathcal{D}(a + b) \cap \mathcal{D}(a + 2b) = \mathcal{D}(a + b) \cap \mathcal{D}(b).$$

Grâce au lemme d'Euclide, l'égalité (2) donne l'égalité d'ensembles $\mathcal{D}(a + b) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$.

On en déduit que $\mathcal{D}(a + b) \cap \mathcal{D}(a + 2b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$.

Autrement dit, les diviseurs communs à $a + b$ et $a + 2b$ sont les diviseurs communs à a et b .

17

Démontrons que pour tout entier relatif pair n , le nombre $N = n(n^2 + 20)$ est divisible par 8.

Soit n un entier relatif pair quelconque.

n peut s'écrire $n = 2p$ avec p entier relatif.

Il est indispensable de définir p avant d'effectuer le calcul qui suit.
Dans un calcul, on ne peut pas utiliser une lettre qui n'a pas été présentée auparavant.

$$\begin{aligned}N &= 2p \left[(2p)^2 + 20 \right] \\ &= 2p(4p^2 + 20) \\ &= 8p^3 + 40p \\ &= 8(p^3 + 5p)\end{aligned}$$

Or $p \in \mathbb{Z}$ donc $p^3 + 5p \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $8 \mid N$.

Pour aller plus loin :

On reprend l'égalité : $N = 8(p^3 + 5p)$

On démontre que $p^3 + 5p$ est un entier pair (en procédant par disjonction de cas selon la parité de p).

1^{er} cas : p pair

Alors p^3 est pair et $5p$ est pair.

Or la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

On en déduit que $p^3 + 5p$ est un nombre pair.

2^e cas : p impair

Alors ...

$p^3 + 5p$ peut donc s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier relatif.

On en déduit que $N = 8 \times 2k = 16k$.

On peut donc affirmer que le nombre N est divisible par 16.

18

Pas trop expliquer, c'est de la logique.

• Si (au début) N est pair, tous les termes d'indices pairs seront pairs et tous les termes d'indices impairs seront impairs.

• Si N est impair, tous les termes d'indices pairs seront impairs et tous les termes d'indices impairs seront pairs.

19

Soit n un entier naturel. Déterminer le chiffre des unités de l'écriture en base dix de $n!$.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $n!$ est divisible par 10 car 2 et 5 apparaissent dans le produit des entiers naturels de 1 à n .

Le chiffre des unités de l'écriture en base dix de $n!$ est donc 0.

20

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

On observe que les résultats sont des carrés parfaits.

Plus précisément, on observe que :

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

Ces résultats permettent de formuler une conjecture pour la somme des n premiers entiers naturels impairs.

Formulation (i) :

On peut conjecturer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ la somme des n premiers entiers naturels impairs est égale à n^2 .

Formulation (ii) :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels impairs est égale à n^2 .

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = n^2$.

Il y a plusieurs démonstrations possibles :

- récurrence ;

- suites

Ce résultat avait été découvert dans l'Antiquité.

Conjeturons une formule pour la somme des n premiers entiers naturels impairs, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Démontrer cette conjecture.

Démonstration :

1^{ère} méthode :

On introduit la suite (u_n) arithmétique définie sur \mathbb{N}^* de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 2.

[On peut aussi introduire la suite (u_n) arithmétique définie sur \mathbb{N} de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.]

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_1 + (n-1) \times 2$$

$$= 1 + 2(n-1)$$

$$= 2n - 1$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} u_k \\ &= n \times \frac{u_1 + u_n}{2} \\ &= n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} \\ &= n \times n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

2° méthode : écriture d'une formule avec le symbole Σ

On réfléchit sur l'écriture générique des termes de la somme.
Les termes de la somme sont de la forme $2k+1$ ou $2k-1$ avec k entier naturel. Il s'agit de l'écriture générique d'un entier impair. On réfléchit ensuite sur les bornes de la somme.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)$$

On utilise les propriétés du symbole Σ et la somme des entiers naturels de 1 à n .

21

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Réponse de Hyacinthe élève de T1 le mardi 14 septembre 2021 :

On peut calculer directement et voir qu'il n'y a pas un motif qui se répète indéfiniment.

Autres réponses :

On doit répondre par le calcul ou par des phrases ?

La suite des décimales n'est pas du tout périodique, il n'y a pas de motif élémentaire.

Les décimales présentent un caractère hasardeux.

On ne connaît ni la valeur de $\ln 2$ ni la valeur de $\ln 3$ donc on peut en déduire que la fraction est irrationnelle.

Analyse :

- D'après le cours (propriété admise), pour tout nombre rationnel x strictement positif différent de 1, $\ln x$ est un nombre irrationnel.

$\ln 2$ et $\ln 3$ sont donc des irrationnels.

On ne peut rien en déduire pour la nature de x .

- La calculatrice donne $x \approx 1,5849625007212$.

Résolution :

Nous allons utiliser un raisonnement par l'absurde.

On suppose que x est un nombre rationnel.

x peut donc s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls.

$$\text{On a donc } x = \frac{p}{q} \text{ soit } \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}.$$

Par produit en croix, on obtient : $q \times \ln 3 = p \times \ln 2$.

On utilise ensuite la propriété du logarithme népérien pour les puissances d'un réel strictement positif :

$$\ln(x^n) = n \ln x \text{ pour } x \text{ réel strictement positif et } n \text{ entier naturel quelconque.}$$

$$\text{On peut donc écrire } \ln(3^q) = \ln(2^p).$$

Une autre propriété du logarithme népérien permet d'enlever le logarithme népérien.

$$\text{On obtient } 3^q = 2^p.$$

3^q est un nombre impair alors que 2^p est un nombre pair (puisque $p \geq 1$), ce qui est impossible.

On en déduit que l'hypothèse « x est un nombre rationnel » est absurde et par conséquent, x est un nombre irrationnel.

24

Déterminons le chiffre x tel que l'entier $\overline{53x4}$ soit divisible par 9.

1^{ère} méthode :

On teste tous les chiffres de 0 à 9. On pourrait éventuellement utiliser un programme Python.

2^e méthode :

On applique le critère de divisibilité par 9.

La somme des chiffres est égale à $5 + 3 + x + 4 = 12 + x$.

Or x est un chiffre donc compris entre 0 et 9. Par suite, $12 + x$ est compris entre 12 et 21.

$\overline{53x4}$ est divisible par 9 $\Leftrightarrow 12 + x$ est divisible par 9

$$\Leftrightarrow x = 6 \quad (\text{car le seul entier compris entre 12 et 21 divisible par 9 est 18})$$

3^e méthode :

On utilise la propriété : « Tout entier naturel est congru à la somme des chiffres de son écriture en base dix ».

On pose $N = \overline{53x4}$.

On a donc $N \equiv x + 12 \pmod{9}$ d'où $N \equiv x + 3 \pmod{9}$.

On cherche le(s) chiffre(s) x tels que $x + 3$ soit divisible par 9.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{53x4}$ soit divisible par 9 est $x = 6$.

Ancienne version :

$\overline{53x4}$ est divisible par 9 si et seulement si $5 + 3 + x + 4$ est divisible par 9

si et seulement si $12 + x$ est divisible par 9

si et seulement si $x = 6$ (on n'écrit pas tout le détail de la recherche)

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{53x4}$ soit divisible par 9 est $x = 6$.

Autre rédaction :

Déterminer x tel que $9 \mid \overline{53x4}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 9 \mid 12 + x$$

$$\Leftrightarrow 12 + x = 18$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \quad (\text{car } x \text{ est un chiffre donc } 0 \leq x \leq 9)$$

25

Déterminons les chiffres x et y tels que l'entier $\overline{3x2y}$ soit divisible par 4 et 3.

Version 9-2-2022

On pose $N = \overline{3x2y}$.

On cherche x et y tels que N soit divisible par 4 et 3.

1^{ère} méthode : On teste toutes les valeurs de x et y . On peut éventuellement utiliser un programme Python.

2^e méthode : On applique les critères de divisibilité.

N est divisible par 4 si et seulement si $\overline{2y}$ est divisible par 4

si et seulement si $y = 0$ ou $y = 4$ ou $y = 8$

N est divisible par 3 si et seulement si $3 + x + 2 + y = x + y + 5$ est divisible par 3.

$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x=5 \\ y=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x=8 \\ y=8 \end{cases}$
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Version du 19 novembre 2019

$$4 \mid \overline{2y} \Leftrightarrow \dots$$

divisibilité par 4

$$\begin{array}{c} \overline{2\dots} \\ \uparrow \\ 0 \leq y \leq 9 \end{array}$$

$\overline{3x2y}$ est divisible par 4 et 3 si et seulement si $\overline{2y}$ est divisible par 4 et $3+x+2+y$ est divisible par 3.

On applique les critères de divisibilité par 4 et 3.

$\overline{2y}$ est divisible par 4 si et seulement $y=0$ ou $y=4$ ou $y=8$.

$$3+x+2+y = x+y+5$$

On donne la liste des possibilités pour lesquelles $\overline{3x2y}$ est divisible par 4 et 3 :

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=8 \\ y=8 \end{cases}$$

Autre solution :

$$4 \mid \overline{3x2y} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{2y} \quad (\text{critère de divisibilité par 4})$$

$$\Leftrightarrow y=0 \text{ ou } y=4 \text{ ou } y=8$$

On rappelle que y est un entier compris entre 0 et 9 puisque c'est un chiffre. On cherche donc les entiers y compris entre 0 et 9 tels que $\overline{2y}$ soit divisible par 4.

$$3 \mid \overline{3x2y} \Leftrightarrow 3 \mid 3+x+2+y$$

$$\Leftrightarrow 3 \mid x+y+5$$

Pour $y=0$, on doit avoir $3 \mid x+5$.

Les valeurs possibles de x sont (on évite le mot « solution ») 1 ; 4 ; 7.

Pour $y=4$, on doit avoir $3 \mid x+9$

Les valeurs possibles de x sont 0 ; 3 ; 6 ; 9.

Pour $y=8$, on doit avoir $3 \mid x+13$

Les valeurs possibles de x sont 2 ; 5 ; 8.

Les couples $(x ; y)$ possibles pour que l'entier $\overline{3x2y}$ soit divisible par 3 et 4 sont :

(1 ; 0) ; (4 ; 0) ; (7 ; 0) ; (0 ; 4) ; (3 ; 4) ; (6 ; 4) ; (9 ; 4) ; (2 ; 8) ; (5 ; 8) ; (8 ; 8).