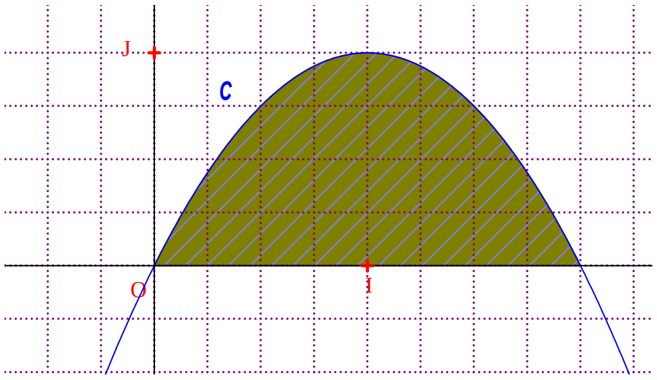
$1^{\text{ère}}$ S1

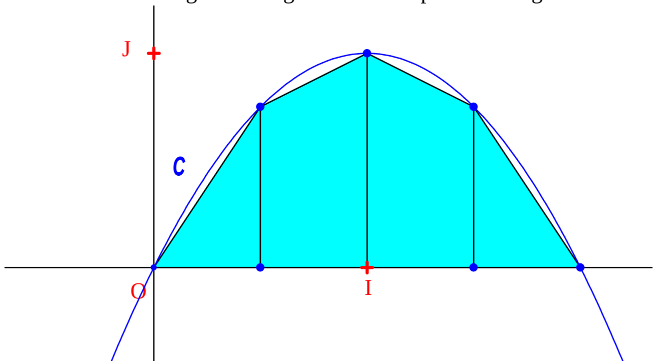
Devoir pour le vendredi 16 septembre 2011

I. On considère la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On souhaite connaître une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.



On ne connaît pas de formule pour calculer cette aire.

1°) Sur le graphique ci-dessous, on a partagé l'intervalle [0 ; 2] en quatre intervalles de même longueur et on a construit avec les points de $\mathcal{C}$ deux triangles rectangles et deux trapèzes rectangles.



Calculer l'aire des deux triangles rectangles et des deux trapèzes et en déduire une valeur approchée de $\mathcal{A}$.
On ne cherchera pas un majorant de l'erreur.

2°) On désire obtenir une valeur approchée plus précise de $\mathcal{A}$.
Recommencer le même principe en partageant l'intervalle [0 ; 2] en huit intervalles de même longueur.
<u>Ne pas détailler les calculs dans ce cas</u>.

II. ***Consignes de présentation pour cet exercice : traits de fractions et de racines carrées à la règle ; calculs en colonnes.***

1°) Soit a et b deux réels strictement positifs.

Démontrer que l'on a : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

2°) **Application :** en utilisant la question 1°), simplifier $A = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.

Vérifier avec la calculatrice.

III. Une expérience aléatoire consiste à lancer 200 fois deux dés cubiques équilibrés et à examiner la sortie d'une somme des numéros égale à 5 (événement E).
Elle a été simulée 100 fois. Le tableau ci-dessous indique le nombre de réalisations de l'événement E lors d'une série de 200 lancers répétée 100 fois.

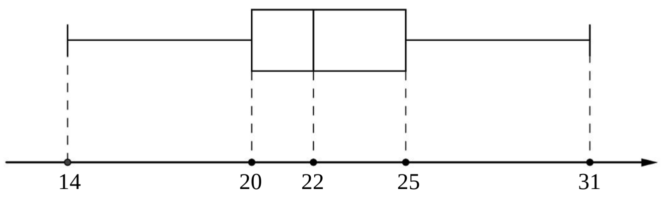
25	22	21	18	25	30	23	28	24	24
22	22	27	25	22	18	21	23	22	17
24	23	30	26	22	27	23	28	18	23
19	14	22	17	24	14	19	18	24	30
20	27	14	14	20	27	15	30	21	23
25	19	18	21	25	29	18	22	20	20
28	20	22	14	31	27	24	15	26	23
29	22	19	23	23	16	27	24	24	23
26	14	22	20	27	27	28	22	21	22
22	20	22	19	21	14	20	27	20	17

1°) Dresser un tableau des effectifs du type (tableau à faire sur une seule ligne) :

Réalisations de E	14	15	….
Effectif	7	2	….
Effectif cumulé croissant			

2°) Déterminer la médiane et les quartiles.

3°) On représente ces paramètres par le diagramme en boîte ci-dessous. Aux extrémités, il indique la valeur minimale et la valeur maximale observées.



Ce diagramme est-il en accord avec les résultats trouvés précédemment ?

4°) Au vu des résultats, Alice affirme que dans au moins 50 % des cas, la fréquence de l'événement E lors d'une expérience est comprise entre 10 % et 12,5 % (au sens large). Est-ce vrai ?

Conseils

L'ensemble du devoir doit tenir sur une seule copie double.

I. Cet exercice demande aux élèves de mobiliser leurs connaissances de 3^{e} et 2^{e} sur les fonctions dans un cadre non classique (mais intéressant).

Utiliser les nombres décimaux (éviter les fractions).
Travailler avec des valeurs exactes (ne pas tronquer ni arrondir les valeurs décimales).

Confusion possible entre valeur approchée et valeur exacte.
L'aire du polygone est une valeur approchée de $\mathcal{A}$.
Il faut bien comprendre que l'aire calculée est une valeur approchée de $\mathcal{A}$.

Appliquer les formules d'aires de triangles et de trapèze en situation (ne pas rappeler les formules et surtout pas avec des lettres *b*, *h*, *B* qui n'ont pas été définies préalablement).

2°) Ecrire l'aire sous la forme d'une seule égalité.

II. Revoir les règles des racines carrées.
Respecter les consignes de présentation (traits de fractions et racines carrées)

III. Revoir le cours de statistiques

Corrigé du DM pour le 16 septembre 2011

I. Fonctions

Cet exercice est très riche. Il permet de reprendre de nombreuses notions sur les fonctions dans un cadre géométrique-graphique (image, courbe, symétrie…).

Il s'agit d'un problème de « quadrature ».
Les problèmes de quadrature sont des problèmes très importants en mathématiques.

Quelques remarques préliminaires :

• On cherche des valeurs approchées de $\mathcal{A}$.
Toutes les valeurs approchées obtenues sont des valeurs approchées par défaut.

• La fonction f est une fonction polynôme du second degré (la fonction f n'est pas une fonction affine).

Sa courbe représentative est une parabole de sommet S(1 ; 2) et admet la droite la droite d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie.

Éviter l'écueil qui consiste à utiliser des lettres (b, B, h etc.) non définies dans l'énoncé.
On applique directement les formules d'aire d'un trapèze et d'un triangle en situation.

1°) On note $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ les aires des domaines représentés sur le graphique ci-dessous.

Attention : le terme « identiques » ne s'emploie pas pour qualifier des triangles.
On parle de triangles « isométriques » (et pas de triangles identiques).

On peut très bien nommer des points sur le graphique mais ce n'est pas du tout indispensable.

$\mathcal{A}_1 = \dfrac{0,75\times 0,5}{2} = \dfrac{0,375}{2} = 0,1875$

$\mathcal{A}_4 = 0,1875$

$\mathcal{A}_2 = \dfrac{(0,75+1)\times 0,5}{2} = \dfrac{0,875}{2} = 0,4375$ (formule de l'aire d'un trapèze)

$\mathcal{A}_3 = 0,4375$

On calcule $S = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 1,25$

$\mathcal{A} \approx 1,25$

L'aire $\mathcal{A}$ est au moins égale à 1,25.

Dans ce cette première question on pouvait lire graphiquement les valeurs de l'image de 0, 5 et de 1,5 dont on avait besoin dans le calcul mais mieux valait faire le calcul (une lecture graphique comporte toujours une part d'imprécision).

Autre façon (version courte) :

La courbe admet la droite Δ d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie.

Le domaine coloré est formé de deux triangles rectangles et de deux trapèzes rectangles.
Les deux triangles sont symétriques par rapport à Δ donc ils sont isométriques.
Les deux trapèzes sont symétriques par rapport à Δ donc ils sont isométriques.

L'aire $\mathcal{A}'$ du domaine coloré est égale à :

$$\mathcal{A}' = \cancel{2}\times\frac{0,5\times f(0,5)}{\cancel{2}} + \cancel{2}\times\frac{\left[f(0,5)+f(1)\right]\times 0,5}{\cancel{2}}$$
$$= 0,5\times 0,75+(0,75+1)\times 0,5$$
$$= 0,375 + 0,875$$
$$= 1,25$$

2°) On note $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ etc. les aires des domaines comme à la question précédente.

La courbe $\mathcal{C}$ est une parabole qui admet la droite d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie.
Donc par raison de symétrie : $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_8$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_7$, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_5$.

$\mathcal{A}_1 = \dfrac{0,25\times 0,4375}{2}$

$\mathcal{A}_2 = \dfrac{0,296875}{2}$

$\mathcal{A}_3 = \dfrac{0,421875}{2}$

$\mathcal{A}_4 = \dfrac{0,484375}{2}$

On calcule $S = 2\mathcal{A}_1 + 2\mathcal{A}_2 + 2\mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4$
$= 0,109375 + 0,296875 + 0,42187 + 0,484375$
$= 1,3125$

$\mathcal{A} \approx 1,3125$

L'aire $\mathcal{A}$ est au moins égale à 1,3125.
La valeur approchée de $\mathcal{A}$ trouvée dans cette question est plus précise que celle trouvée à la question précédente (sans qu'il soit possible de préciser l'erreur).

Version courte :

L'aire $\mathcal{A}''$ du domaine coloré est égale à :

$$\mathcal{A}'' = \underbrace{\cancel{2}\times\frac{0,25\times f(0,25)}{\cancel{2}}}_{\text{triangles}} + \underbrace{\cancel{2}\times\frac{\left[f(0,25)+f(0,5)\right]\times 0,25}{\cancel{2}} + \cancel{2}\times\frac{\left[f(0,25)+f(0,75)\right]\times 0,25}{\cancel{2}}}_{\text{trapèzes}}$$

$= 0,109375 + 1,203125$
$= 1,3125$

Pour aller plus loin :

• On pourrait chercher à automatiser le calcul à l'aide d'un tableur, considéré d'usage courant aujourd'hui en mathématiques (réfléchir à une formule).

• On peut démontrer que la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$ est égale à $\dfrac{4}{3}$ (on peut trouver ce résultat à l'aide de suites étudiées vers la fin de l'année de 1ère ou à l'aide des primitives et des intégrales étudiées en Terminale).

Avec la calculatrice, on trouve : $\dfrac{4}{3} = 1{,}333333\ldots$

On constate que les valeurs approchée de A obtenues précédemment ne sont pas si mauvaises…

II. Calcul numérique et littéral

1°) Démontrons que : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$$

2°) Simplifions $\mathrm{A} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.

On applique le résultat de la question 1°) avec $a = \sqrt{2}+1$ et $b = \sqrt{2}-1$.

$$\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2-1}}$$

$$= \frac{2}{1}$$

$$= 2$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

III. Statistiques

1°) **Tableau des effectifs et des effectifs cumulés croissants**

Valeurs	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Effectif	7	2	1	3	6	5	9	5	15	10	9	5	3	9	4	2	4	1
Effectif cumulé croissant	7	9	10	13	19	24	33	39	54	64	72	77	80	89	93	95	99	100

2°) **Déterminons la médiane et les quartiles.**

Médiane

L'effectif total N est égal à 100 ; c'est un nombre pair.

$100 = 50 \times 2$

Donc $\mathrm{Med} = \dfrac{50^{\mathrm{e}}\,\text{valeur} + 51^{\mathrm{e}}\,\text{valeur}}{2} = \dfrac{44}{2} = 22$ (on applique la convention de calcul de la médiane dans le cas d'un effectif total pair)

Premier quartile

$\dfrac{N}{4} = 25$

Le premier quartile est la 25e valeur.

$Q_1 = 20$

Troisième quartile

$\dfrac{3N}{4} = 75$

Le troisième quartile est la 75e valeur.

$Q_3 = 25$

L'écart interquartile est égal à 5.

Attention à la convention de calcul.

3°) Le diagramme en boîte est bien en accord avec les résultats trouvés précédemment. On regarde la valeur minimale, la valeur maximale, les quartiles et la médiane.

4°) Calculons 10 % de 200 : $200 \times \dfrac{10}{100} = 20$

Calculons 12,5 % de 200 : $200 \times \dfrac{12{,}5}{100} = 25$

Calculons maintenant l'effectif des valeurs comprises entre 20 et 25 au sens large.

$9 + 6 + 15 + 10 + 8 + 5 = 53$

La proportion est donc égale à $\frac{53}{100} = 53\ \%$.

L'affirmation d'Alice « dans au moins 50 % des cas, la fréquence de l'événement E lors d'une expérience est comprise entre 10 % et 12,5 % » est donc vraie.

Autre façon :

Valeurs	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Fréquence de E	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15	15,5

On remarque que les valeurs dont la fréquence est comprise entre 10 et 12,5 au sens large sont : 20, 21, 22, 23, 24, 25.
La somme des effectifs de ces valeurs est égale à 53.

La proportion est donc égale à 53 % donc l'affirmation d'Alice est vraie.