1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 16 mai 2011 (45 minutes)

Répondre très lisiblement, <u>sans rature</u>, sans abréviation, en écrivant au stylo à plume.
Ne rien écrire ni surligner sur l'énoncé en dehors de ce qui est demandé (même au crayon).

Nom : …………………………… **Prénom :** …………………………… **Note : …… / 20**

I. (4 points) Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Compléter les implications suivantes (écrire un seul résultat à chaque fois ; attention, il n y'a pas de forme indéterminée !) :

1°) Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$, alors : $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$............. .

2°) Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, alors : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{}$............. .

3°) Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -3$, $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et pour tout entier naturel n $v_n < 0$, alors : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{}$............. .

4°) Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$, alors : $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$............. .

II. (3 points) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison $q = -\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

1°) Exprimer S_n en fonction de *n*. Tirer tous les traits de fractions à la règle.

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. Détailler la démarche.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (3 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{2x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = \dfrac{x+1}{2}$ pour asymptote oblique en +∞.

Détailler la démarche ; faire les traits de fraction à la règle.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

IV. (2 points) Donner l'ensemble des solutions S dans l'intervalle [– π ; 2π] de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

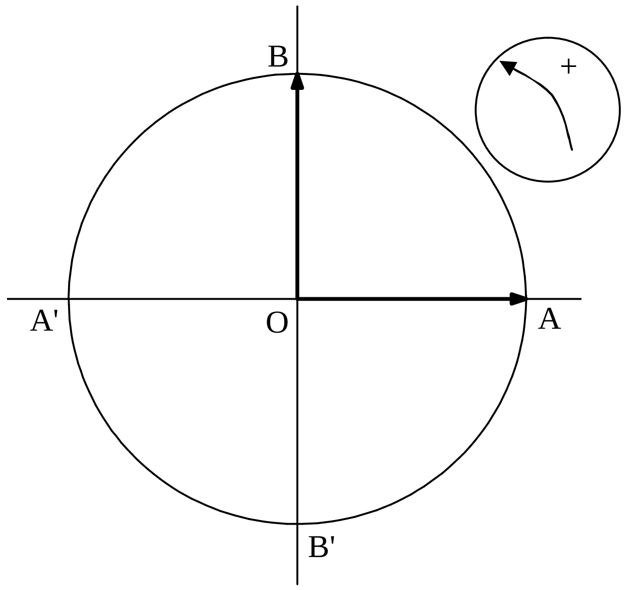
S = ………………………………....

V. (2 points) Donner l'ensemble des solutions S dans l'intervalle [– π ; π] de l'inéquation $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

Le détail de la démarche n'est pas demandé.

Sur le cercle trigonométrique donné ci-contre, représenter en rouge l'arc ou les arcs auxquels appartiennent les solutions (en faisant notamment attention à bien marquer les extrémités du ou des arcs).

S = …………………………………………



VI. (3 points) Soit n un entier naturel quelconque. Simplifier sans donner le détail des calculs les expressions suivantes (écrire un seul résultat à chaque fois) :

$2^{n+1} - 2^n$ = …………..	$3^{n+2} - 3^n$ = …………..	$\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ = …………..

VII. (3 points) On dépose sur un livret d'épargne une somme inférieure ou égale à 5 000 €. Elle augmente chaque année de 4 %.

1°) Compléter la phrase :

« Cette situation peut être modélisée par une suite …………………….. de raison …………………. ».

2°) On considère les algorithmes suivants qui répondent tous les deux à une même question.

Algorithme 1	**Algorithme 2**

VARIABLES : S, *n* nombres
 	
ENTREE : Saisir S
 	
INITIALISATION : *n* prend la valeur 0
 	
TRAITEMENT :
Tantque S $\leqslant$ 6000 **Faire**
    S prend la valeur S $\times$ 1,04
    n prend la valeur *n* + 1
FinTantque
 	
SORTIE : Afficher *n*
	VARIABLES : S, *n* nombres
	
	ENTREE : Saisir S
	
	INITIALISATION : *n* prend la valeur 0
	
	TRAITEMENT :
	Répéter
	    S prend la valeur S$\times$ 1,04
	    n prend la valeur *n* + 1
	Jusqu'à S > 6000
	
	SORTIE : Afficher *n*

Interpréter concrètement (par rapport à l'énoncé de l'exercice) la valeur de *n* obtenue en sortie pour chacun de ces deux algorithmes lorsque la somme de départ est de 3 000 € (répondre avec précision).

Le nombre *n* obtenu en sortie est …………………………………………………………………………..

………..

(On ne demande pas la valeur de *n* dans la réponse à cette question).

3°) Programmer cet algorithme sur calculatrice et donner l'entier *n* obtenu. *n* = …………………..

Bonus (1 point)

À faire sur une feuille à part

1°) a) Ecrire un algorithme en langage naturel qui permet de calculer la somme des carrés de tous les entiers naturels de 0 à 100 (c'est-à-dire S = $0^2+1^2+3^2+...+100^2$).

b) Programmer cet algorithme sur calculatrice ; écrire le programme dans le langage de la calculatrice sur la copie en indiquant le modèle de calculatrice utilisé.

c) Ecrire la valeur de S obtenue.

d) Vérifier le résultat précédent en utilisant la formule sommatoire suivante valable pour tout entier naturel *n* :

$0^2+1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (formule que l'on admettra sans démonstration).

2°) Ecrire un algorithme qui demande un nombre entier naturel *n* à l'utilisateur et qui renvoie la somme des carrés de tous les entiers naturels de 0 à *n*, sans utiliser la formule sommatoire donnée à la question 1°) d).

Corrigé du contrôle du 16 mai 2011

I.

1°) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors : $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

2°) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3°) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -3$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour tout entier naturel n $v_n < 0$, alors : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4°) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors : $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

II. (u_n) : suite géométrique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison $q = -\dfrac{1}{3}$.

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \quad (n \geqslant 1)$

1°) Exprimons S_n en fonction de *n*.

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\
&= u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{(formule sommatoire pour la sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique)} \\
&= 4 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} \\
&= 4 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{4}{3}} \\
&= 3 \times \left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

Attention à toutes les fautes possibles d'algèbre (oubli de parenthèses, simplifications abusives etc).

2°) Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \text{car } -1 < -\frac{1}{3} < 1$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 3$ (par application des règles opératoires sur les limites de suites)

III. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{2x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$

$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrons que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = \dfrac{x+1}{2}$ pour asymptote oblique en +∞.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} \quad f(x) - \frac{x+1}{2} = \frac{x^2+3}{2x-2} - \frac{x+1}{2}$$

$$= \frac{x^2+3-(x+1)(x-1)}{2(x-1)}$$

$$= \frac{x^2+3-(x^2-1)}{2(x-1)}$$

$$= \frac{4}{2(x-1)}$$

$$= \frac{2}{x-1}$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \dfrac{x+1}{2} \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$

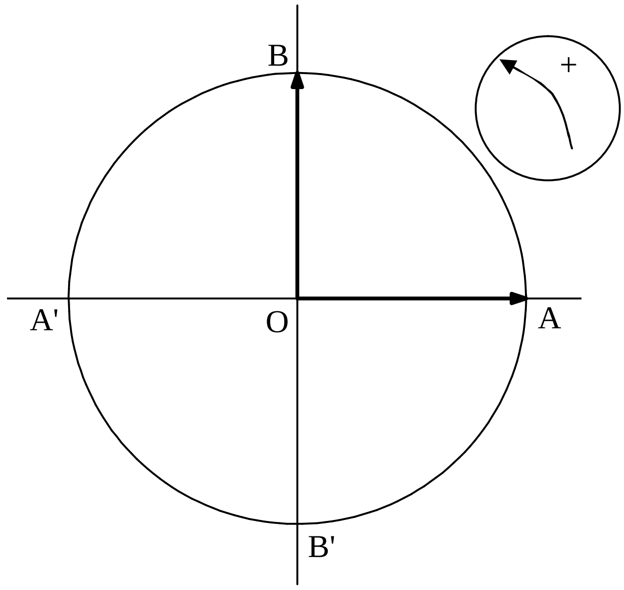
La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x+1}{2}$ pour asymptote oblique en +∞.

IV. Ensemble des solutions dans l'intervalle [– π ; 2π] de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4} \right\}}$$

V. Ensemble des solutions dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ de l'inéquation $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

$$S = \left[-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}\,;\pi\right]$$



VI. Simplifications d'expressions :

$2^{n+1} - 2^n = 2^n$	$3^{n+2} - 3^n = 3^n \times 8$	$\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2^n - 1$

VII. On dépose sur un livret d'épargne une somme inférieure ou égale à 5 000 €.
Elle augmente chaque année de 4 % (c'est-à-dire que le taux d'intérêt est de 4 %).

1°) « Cette situation peut être modélisée par une suite **géométrique** de raison ***q* = 1,04**.

2°) Le nombre n obtenu en sortie est **le nombre d'années nécessaires pour que la somme placée sur le livret devienne strictement supérieure à 6 000 €**.

3°) Sur calculatrice, on trouve ***n* = 18**.

Voici le programme correspondant à l'algorithme sur calculatrice TI.

```
Prgm : EPARGNE

Input " S = ", S
0 → N
While  S ⩽ 6 000
A × 1,04 → A
N + 1 → N
End
Disp N
```