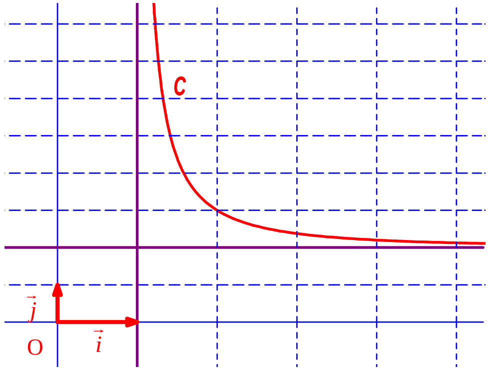
1ère S1

Contrôle du mercredi 18 mai 2011 (3 h)

Au début de la copie, aménager un cartouche de présentation avec le numéro des exercices de I à VI.
Rédiger très lisiblement et sans rature, en écrivant au stylo à plume. Ne pas utiliser d'abréviations.
Mettre les résultats demandés bien en évidence en les encadrant en rouge à la règle.
Ne pas rendre l'énoncé dans la copie.
Ne rien écrire sans avoir préalablement cherché au brouillon.
Il est demandé de ne rien écrire, de ne rien surligner sur l'énoncé (même au crayon).
Les exercices I, II, III seront traités sur la feuille de réponses fournie avec le sujet.
Les exercices IV, V, VI seront traités sur copie.
Tirer les traits de fraction à la règle.
Le barème est donné sur 40.

I. (6 points) On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $I =]1\,;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe $\mathcal{C}$ admet les droites d'équations $x = 1$ et $y = 2$ pour asymptotes.



1°) En utilisant uniquement les limites en 1 (à droite) et en $+\infty$ (sans utiliser la calculatrice graphique !), retrouver parmi les expressions suivantes l'expression de f (justifier uniquement pour l'expression choisie) :

$\dfrac{2x-5}{x-1}$ $\qquad$ $\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ $\qquad$ $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$

2°) Calculer $f'(x)$ (donner le résultat sans explication) et justifier que f est décroissante sur I.
3°) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2. Donner le résultat directement sans justifier.

II. (6 points) On considère la fonction f définie sur l'intervalle par $I =]2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$. On note sa représentation graphique $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Calculer $f'(x)$ (donner le résultat sans justifier sous forme d'un quotient avec numérateur et dénominateur factorisés).
2°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant le signe de la dérivée et les variations de f sur I.
On tracera les flèches de variation à la règle. On n'oubliera pas de faire apparaître un 0 chaque fois que la dérivée s'annule.
Compléter le tableau de variation avec la (les) valeur(s) de (des) extremum(s) ainsi que les limites aux bornes de I (sans détailler aucun calcul de limite).
3°) Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ (on ne demande pas de détailler la démarche).
En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ (détailler la démarche).

On conclura selon le modèle suivant :

« $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation …………………….. pour asymptote oblique en $+\infty$ ».

III. (7 points) Dans tout cet exercice, une unité de longueur est fixée.

On considère un carré $A_0B_0C_0D_0$ de côté 1.
On place le point A_1 situé au quart du segment $[A_0B_0]$ à partir de A_0, le point B_1 situé au quart du segment $[B_0C_0]$ à partir de B_0, et de même les points C_1 et D_1 sur les segments respectifs $[C_0D_0]$ et $[D_0A_0]$.
On itère cette construction pour former une suite de carrés comme le montre la **figure 1** donnée en annexe (on admettra sans démonstration que l'on obtient effectivement bien des carrés).
On désigne par c_n la longueur du côté du carré $A_nB_nC_nD_n$.

1°) a) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. On pourra utiliser le théorème de Pythagore.

b) En déduire que (c_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

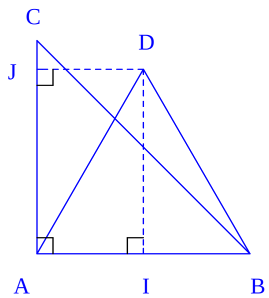
c) Déterminer le sens de variation de la suite (c_n).
On conclura ainsi : « La suite (c_n) est ………………… à partir de l'indice 0. »

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

2°) À l'aide de la calculatrice (en concevant un petit programme), déterminer le plus petit indice n tel que $c_n \leqslant 10^{-6}$. L'écriture de l'algorithme ou du programme n'est pas demandée. Donner la réponse sans justifier.

3°) On note L_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_n$ (voir **figure 2** en annexe).
a) Déterminer une expression simplifiée de L_n (en arrangeant le résultat).
b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$ (en justifiant).

IV. (6 points) Dans la figure donnée ci-dessous, ABC est un triangle rectangle isocèle en A, ABD est équilatéral, I est le milieu de [AB] et J le projeté orthogonal de D sur (AC). On pose $AB = a$.



1°) a) Calculer, en fonction de a, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$. (Indication : on pourra exprimer AJ en fonction de a).

b) En déduire $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$ en fonction de a.

2°) Calculer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{DBC}$.

3°) Déduire des résultats précédents que $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

V. (9 points) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points A(– 1 ; – 2) et B(2 ; 1) (aucune figure n'est demandée dans cet exercice).
Le but de l'exercice est de déterminer par deux méthodes différentes l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\dfrac{MA}{MB} = 2$.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A. Méthode géométrique (c'est-à-dire sans utiliser les coordonnées des points)

1°) Démontrer que M $\in E$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$.

2°) En déduire que M $\in E$ si et seulement si $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$ où I est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; –2) et J le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).
3°) Conclure (« L'ensemble E est ………………….. »).

Partie B. Méthode analytique (c'est-à-dire en utilisant les coordonnées des points)

Il est demandé de ne pas utiliser les résultats de la partie A.
1°) Démontrer que M $\in E$ si et seulement si $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$.
2°) En déduire la nature de E (avec précision).

VI. (6 points) Exercice à prise d'initiative

Cet exercice demande une recherche préalable approfondie au brouillon. On commencera par analyser le problème avant de commencer à mettre en forme une réponse rédigée.

Soit deux points A et B tels que AB = 1. On construit de A à B une suite de trajets, formés de segments de même longueur.

Étape 1 : on partage [AB] en son milieu I et on forme deux triangles équilatéraux. Le trajet comporte 4 segments de même longueur.

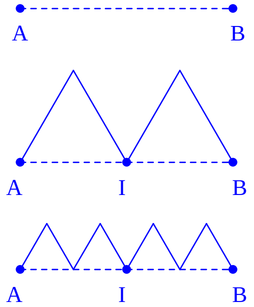
Étape 2 : on partage [AI] et [IB] en leurs milieux et on forme quatre triangles équilatéraux. Le trajet comporte 8 segments de même longueur.

On continue ainsi de suite en appliquant le même procédé.

Situation initiale

Étape 1

Étape 2



Que vaut la longueur du trajet à l'étape n (n entier naturel supérieur ou égal à 1) ?

Figures de l'exercice III

Figure 1

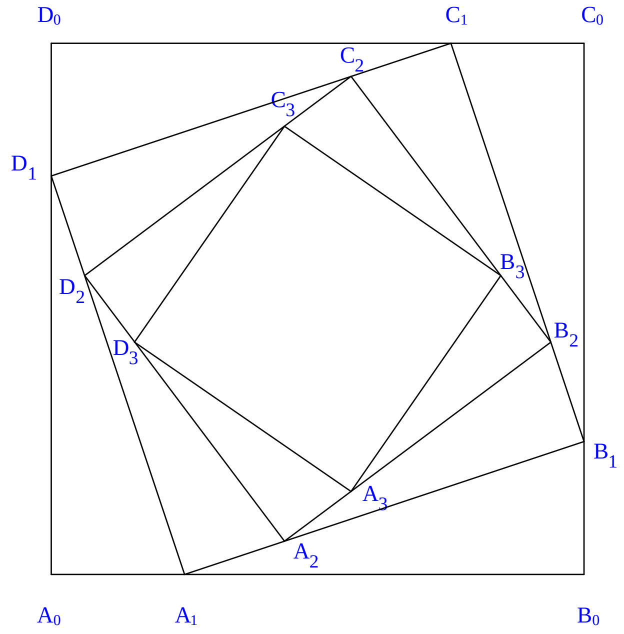
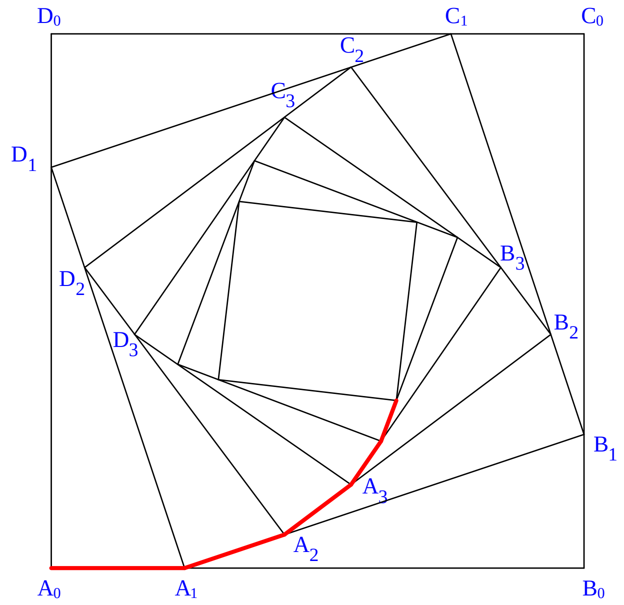


Figure 2



Prénom : …………………………… **Nom : …………………………………………………**

I.

1°) **Expression choisie :** $f(x) = \frac{\qquad}{\qquad}$

Justification :

Limite en 1 (à droite)

………

………

………

Limite en + ∞ (à droite) :

………

………

………

2°) $f'(x) = \frac{\qquad}{\qquad}$

Justification du sens de variation de *f* sur I (faire une phrase et non un tableau) :

………

………

………

3°) Équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2 :

II.

1°) Pour tout $x \in$ I, $f'(x) = \frac{\qquad}{\qquad}$. Vérifier que le numérateur et le dénominateur soient bien factorisés.

2°)

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de ……………..	
Signe de ……………..	
Signe de ……………..	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

Vérifier que les flèches soient bien tracées à la règle, qu'il y a bien les limites, la (ou les) valeur(s) du (des) extremum(s), les zéros d'annulation des différentes expressions.

3°) Écriture de $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$: $\forall x \in$ I $\quad f(x) = $ ……………………………………

Asymptote oblique :

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III.

Barème détaillé du contrôle du 18 mai 2011

I. 1 point par réponse

II.

1°) 1 point
2°) 1 point pour l'étude du signe de la dérivée
1 point pour les variations de la fonction et l'extremum
3°) 1 point pour la transformation d'écriture
2 point pour la démarche de l'asymptote oblique

III. 1 point par réponse (la question 1°) b) est un cadeau)

IV.

1°) 1 point pour le premier produit scalaire
2 points pour le deuxième produit scalaire (qui inclut notamment le calcul de la longueur AJ si l'élève a calculé cette longueur ce qui n'était pas obligatoire)
2°) 1 point
3°) 1 point

V.

Partie A

1°) 2 points
2°) 2 points
3°) 1 point

Partie B

1°) 2 points
2°) 2 points

VI. 2 points

1 point est accordé pour le résultat
1 point est accordé pour la démarche

Corrigé du contrôle du 18 mai 2011

I.

1°) **Expression choisie :** $\boxed{f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}}$

Justification :

Limite en 1 (à droite)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x^2+1\right)=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)=0^+\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty.$$

Limite en + ∞ (à droite) :

f est une fonction rationnelle non nulle ; on applique la règle du quotient des monômes de plus haut degré (car on étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers + ∞).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty} 2=2$$

Remarque importante :

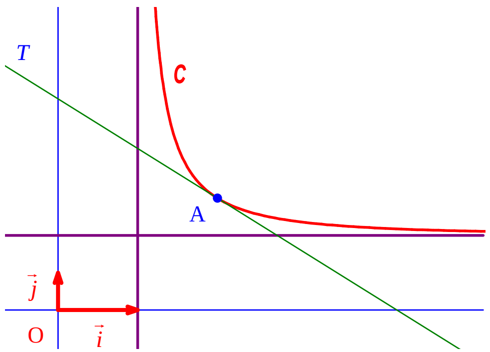
On pouvait bien évidemment vérifier le choix de l'expression de *f* grâce à la calculatrice, même si l'énoncé attendait uniquement une justification à l'aide des limites.

2°) $\boxed{f'(x)=-\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^2}}$ **(On obtient cette dérivée en utilisant la formule de dérivée d'un quotient.)**

Justification du sens de variation de *f* sur I (faire une phrase et non un tableau) :

$\forall\, x\in \mathrm{I}\quad f'(x)<0$
Donc *f* est strictement décroissante sur I.

3°) Équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2 : $y=\dfrac{17-4x}{3}$



II.

1°) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}}$.

2°)

x	2		4		$+\infty$
Signe de x		+		+	
Signe de $x-4$		–	0^{num}	+	
Signe de $(x-2)^2$	$0^{\text{déno}}$	+		+	
Signe de $f'(x)$	‖	–	0^{num}	+	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

Comme la calculatrice était autorisée, il était impensable de ne pas l'utiliser : cela permettait de vérifier les résultats et de rectifier d'éventuelles erreurs (beaucoup d'élèves ont trouvé pour dérivée $f'(x)=\dfrac{x(x-6)}{(x-2)^2}$ ce qui donnait un tableau de variation faux…)

3°) Écriture de $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$: $\forall\, x \in \mathrm{I}$ $\boxed{f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-2}}$

Asymptote oblique :

$$\forall\, x \in \mathrm{I} \quad f(x)-(x+2)=\frac{4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x-2}\right)=0$$

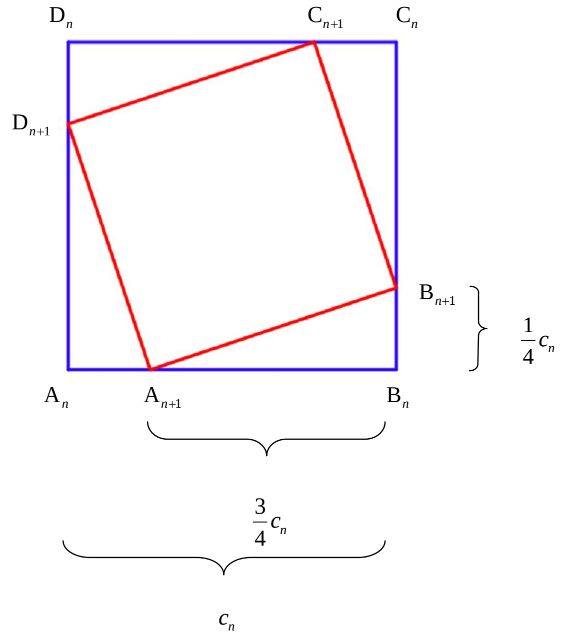
Donc $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x + 4$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

III.

1°) Exprimons c_{n+1} en fonction de c_n.

On se place dans le triangle $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ rectangle en B_n.
Attention aux notations de distances : une distance se note sans crochet (la notation avec crochets est réservée aux segments).

Le mieux est de faire une figure.



Les côtés de l'angle droit ont pour longueur $\dfrac{3}{4}c_n$ et $\dfrac{1}{4}c_n$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $(c_{n+1})^2=\left(\dfrac{3}{4}c_n\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}c_n\right)^2$

$$=\frac{9}{16}(c_n)^2+\frac{1}{16}(c_n)^2$$

$$=\frac{10}{16}(c_n)^2$$

Par conséquent, $c_{n+1}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}c_n$ (car $c_n \geq 0$, c_n étant une longueur)

b) D'après la relation précédente, (c_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

c_0 est la longueur du côté $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0\mathrm{D}_0$.
Or par hypothèse, $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0\mathrm{D}_0$ a pour côté 1.
Donc on a : $c_0 = 1$.

c) On a : $c_0 > 0$ et $0 < q > 1$ donc (c_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.
Commentaire : on pouvait voir se résultat de manière évidente sur la figure (les carrés sont de plus en plus « petits »).

d) Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad c_n = 1\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^n = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^n$

On a : $-1 < \dfrac{\sqrt{10}}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^n = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

La suite (c_n) est convergente (elle converge vers 0).

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminons le plus petit entier naturel n tel que $c_n \leqslant 10^{-6}$.

On réalise un algorithme avec une boucle « Tantque » (algorithme permettant de trouver une valeur seuil).

Variables :
c : réel
n : entier naturel

Initialisations :
c prend la valeur 1
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $c > 10^{-6}$ **Faire**
n prend la valeur $n + 1$
c prend la valeur $c\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

Commentaires sur cet algorithme :

1. L'instruction « c prend la valeur $c\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ » se réfère à la définition en mode récurrent de la suite (c_n).
On pourrait aussi utiliser la formule explicite du terme général, mais cela serait moins dans l'esprit d'un algorithme.

2. Les instructions qui interviennent dans la boucle (« n prend la valeur $n + 1$ » et « c prend la valeur $c\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ »), sont interchangeables car n n'intervient pas dans la deuxième instruction.

En réalisant le programme correspondant sur calculatrice, on trouve $n = 59$.

On voit que sans algorithme, on passerait beaucoup de temps pour trouver n !
On vérifie à la calculatrice :

$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^{58} = 1{,}20370621\ldots \times 10^{-6}$

$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^{59} = 9{,}51613318\ldots \times 10^{-7}$

Le plus petit entier naturel n tel que $c_n \leqslant 10^{-6}$ est 59.

3°) a)

$$\begin{aligned} L_n &= A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n \\ &= \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{4}c_1 + \ldots + \frac{1}{4}c_{n-1} \\ &= \frac{1}{4}\left(c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}\right) \end{aligned}$$

On applique la formule sommatoire pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

$L_n = \dfrac{1}{4}\left(c_0\times\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$ (car le nombre de termes de la somme est égal à n)

$$= \frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n}{4\times\left(1-\frac{\sqrt{10}}{4}\right)}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n}{4-\sqrt{10}}$$

b) On a : $-1<\frac{\sqrt{10}}{4}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n=0$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{L}_n=\frac{1}{4-\sqrt{10}}$.

La longueur de la ligne brisée tend vers une limite finie.

IV.

1°)

Calcul de $\overrightarrow{\mathbf{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathbf{BA}}$

1ère méthode :

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\mathrm{BD}\times\mathrm{BA}\times\cos\widehat{\mathrm{ABD}}$ (on évite d'écrire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}};\overrightarrow{\mathrm{BD}}}\right)$ qui est un peu lourd, de même pour les normes $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left\|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right\|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right\|\times\cos\widehat{\mathrm{ABD}}$)

Or ABD est équilatéral donc $\widehat{\mathrm{ABD}}=\frac{\pi}{3}$ et AB = BD = a.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}\\&=a^2\times\frac{1}{2}\\&=\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

2e méthode :

I est le projeté orthogonale de D sur la droite (AB).

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\overrightarrow{\mathrm{BI}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BA}}\\&=\frac{a}{2}\times a\\&=\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{\mathbf{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

1ère méthode :

J est le projeté orthogonal de D sur (AC) donc AJD est rectangle en J.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathrm{AD}^2=\mathrm{AJ}^2+\mathrm{AI}^2$.

On obtient alors $\mathrm{AJ}^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ soit $\mathrm{AJ}^2=\frac{3a^2}{4}$.

On peut donc écrire : $\mathrm{AJ}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ABC est rectangle en A donc A est le projeté orthogonal de D sur (AC).
J est le projeté orthogonal de D sur (AC).
Donc $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ sur (AC).

Par conséquent, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

J $\in$ [AC] donc $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires et de même sens.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\mathrm{AJ}\times\mathrm{AC}\\&=\frac{a\sqrt{3}}{2}\times a\\&=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

2e méthode :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\mathrm{BD}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BD}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right)\\&=a\times a\times\cos\frac{\pi}{6}\\&=a\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$ (relation de Chasles)

$= \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

2°) **Calculons la mesure en radians de l'angle $\widehat{DBC}$.**

ABC est rectangle isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{4}$.

ABD est équilatéral donc $\widehat{ABD} = \dfrac{\pi}{3}$

Ainsi, on a : $\widehat{DBC} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{4\pi}{12} - \dfrac{3\pi}{12}$

$= \dfrac{\pi}{12}$

3°) **Calculons $\cos\dfrac{\pi}{12}$.**

ABC est rectangle isocèle en A donc d'après le théorème de Pythagore, on a
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
D'où $BC^2 = 2a^2$.
On a donc $BC = a\sqrt{2}$.

Or par définition du produit scalaire, on a : $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = BD \times BC \times \cos\widehat{DBC}$.

Par conséquent, on a : $\dfrac{a^2\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} = a\sqrt{2} \times a \times \cos\dfrac{\pi}{12}$.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{a^2\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}}{a^2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Remarque :

Une autre façon de trouver cette valeur en utilisant la formule d'addition du cosinus en écrivant $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

Mais ce n'était pas la méthode suivie par l'exercice.

V.

Partie A

1°) $M \in E$ si et seulement si $\dfrac{MA}{MB} = 2$

si et seulement si $MA = 2MB$

si et seulement si $MA^2 = 4MB^2$

si et seulement si $MA^2 - 4MB^2 = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2 = 0$

si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$

2°) I est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; –2).
Donc d'après la relation fondamentale, $\forall M \in P$ $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$.

J est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).
Donc d'après la relation fondamentale, $\forall M \in P$ $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MJ}$.

$M \in E$ si et seulement si $\left(-\overrightarrow{MI}\right) \cdot \left(3\overrightarrow{MJ}\right) = 0$

si et seulement si $-3\left(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$

3°) On déduit que l'ensemble *E* est le cercle de diamètre [IJ].

Partie B

1°) Démontrons que M $\in E$ si et seulement si $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$.

Il s'agit d'établir une équivalence.

$M \in E$ si et seulement si $\dfrac{MA}{MB} = 2$ (on part bien de $\dfrac{MA}{MB} = 2$)

si et seulement si $MA = 2MB$

si et seulement si $MA^2 = 4MB^2$

si et seulement si $(-1-x)^2 + (-2-y)^2 = 4\left[(2-x)^2 + (1-y)^2\right]$

si et seulement si $1 + 2x + x^2 + 4 + 4y + y^2 = 4\left(4 - 4x + x^2 + 1 - 2y + y^2\right)$

si et seulement si $-3x^2 - 3y^2 + 18x + 12y - 15 = 0$

si et seulement si $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

2°) Déduisons-en la nature de *E*.

On reprend le résultat de l'équivalence démontrée à la question précédente.

M $\in E$ si et seulement si $(x-3)^2 + (y-2)^2 - 13 + 5 = 0$

si et seulement si $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$

Conclusion : *E* est le cercle de centre $\Omega(3 ; 2)$ et de rayon $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

VI.

Recherche :

Il y a plusieurs moyens de chercher. En gros, tous s'appuient sur des schémas à partir des premières étapes pour comprendre ce qui se passe.
Assez vite, on observe que la longueur du trajet est (semble) constante.

C'est une conjecture que l'on va valider par une démonstration.

Mise en forme d'un raisonnement :

Il y avait essentiellement deux façons de répondre : soit par des phrases (sans calcul), soit en utilisant des suites (en faisant quelques calculs).

1ère façon : explication par des phrases

En passant d'une étape à la suivante, le nombre de segments est multiplié par 2 alors que la longueur de chaque segment est divisée par 2.
Par conséquent, la longueur du trajet reste constante, égale à celle du trajet à l'étape 1 c'est-à-dire 2.

2e façon : en faisant intervenir des suites

Soit a_n le nombre de segments du trajet à l'étape n et l_n la longueur de chaque segment à l'étape n.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = 2a_n$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad l_{n+1} = \dfrac{l_n}{2}$

On en déduit que la suite (a_n) est géométrique de raison 2 et que la suite (l_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{aligned} a_n &= a_1 \times 2^{n-1} \\ &= 2 \times 2^{n-1} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{aligned} l_n &= l_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

La longueur du trajet à l'étape n est égale à $a_n \times l_n = 2^n \times \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{2^n}{2^{n-1}} = 2^{n-(n-1)} = 2^1 = 2$.

La conjecture est validée.

Pour aller plus loin :

Cet exercice soulevait un paradoxe intéressant.
Le trajet à n'importe quelle étape n est une ligne brisée de longueur constante de longueur 2.
Lorsque n tend vers $+\infty$, cette ligne brisée semble se rapprocher du segment [AB] de longueur 1 ce qui est un peu paradoxal.