1$^{\text{ère}}$ S3

Contrôle du lundi 17 mai 2010 (3 heures)

Prénom : ………………………………. **Nom : ……………………………………..**

- **Tous les exercices seront rédigés sur copie, à l'exception des exercices V et VI.**
- **Traiter les exercices dans l'ordre en tirant un trait rouge, après chaque exercice.**
- **Écrire très lisiblement et sans rature.**
- **Encadrer tous les résultats en rouge à la règle. Faire également tous les traits de fraction à la règle.**
- **Ne rien écrire sur l'énoncé en dehors de ce qui est demandé dans l'énoncé.**

I. (6 points) On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 - 1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$f(-\sqrt{3})$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

1°) a) À l'aide du tableau de variation, démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes D et D' dont on précisera une équation.

On rédigera la conclusion selon le modèle de rédaction suivant :

« La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite D d'équation … pour … et la droite D' d'équation … pour … ».

b) Justifier par le calcul les résultats des limites en $(-1)^-$ et en $-\infty$.

2°) En utilisant le tableau de variations, préciser les valeurs de x en lesquelles f atteint un extremum local et les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.
Aucune justification n'est demandée sur la copie ; on se contentera de recopier et de compléter en rouge les phrases suivantes :

- « f atteint un extremum local en ………………….. ».

- « La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ………………. ».

3°) En utilisant le calcul de la dérivée de f, justifier que f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{3}\ ;+\infty\right[$.

4°) a) Démontrer que pour tout réel x de $\mathcal{D}$, on a : $f(x) = x - 2 + \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

b) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une droite Δ dont on donnera une équation pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

On rédigera suivant le modèle suivant :

« La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation … pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$. »

5°) *Dans cette question, toute trace de recherche incomplète ou infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 2}{x^2 - 1}$ et l'on note Γ sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ est l'image de Γ par une translation que l'on précisera.

II. (2 points) Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_{44} = 61$ et $u_{245} = -542$.

1°) Calculer la raison r de la suite (u_n) puis son premier terme u_0.

2°) Calculer la somme $S = u_{44} + u_{45} + \ldots + u_{245}$.

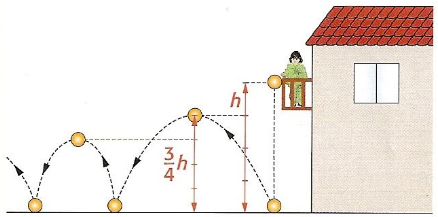
III. (2 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2$.

1°) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_0 et la raison.

2°) En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

IV. (2 points) Une balle est lancée d'un balcon à une hauteur h (en mètres) du sol. À chaque rebond, la balle remonte d'une hauteur égale aux $\dfrac{3}{4}$ de la hauteur atteinte au rebond précédent.



1°) On note u_0 la hauteur initiale en mètre d'où est lâchée la balle et, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on note u_n la hauteur de la balle en mètres au n-ième rebond.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

2°) À partir de quelle hauteur h faut-il lâcher cette balle pour que le quatrième rebond atteigne une hauteur supérieure à 1,70 m ? Donner la valeur arrondie à 0,1 m près.

V. (2,5 points) Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit D et D' les droites d'équations respectives $y = 2x - 2$ et $y = -x - 1$.

On note A le point de D d'abscisse 2, B le point de D' d'abscisse 1 et C le point de D' d'abscisse – 3.

Compléter en bleu <u>sans justifier</u> les phrases suivantes.

1°) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} =$ ....

2°) Une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AC] s'écrit : ……………………………………………..

3°) Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A s'écrit : ………………………………………………………..

4°) Une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par C s'écrit : ………………………

5°) Le point H, orthocentre du triangle ABC, a pour coordonnées (…. ; ….).

VI. (2 points) Dans tout l'exercice, x et y désignent deux réels quelconques.
Pour chaque question, on donne une expression et l'on demande de choisir une autre expression qui lui est égale parmi quatre réponses proposées (il n'y a qu'une seule réponse exacte).
Entourer la réponse choisie.
Chaque réponse juste rapporte 0,5 point ; chaque réponse fausse n'enlève aucun point ; une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1°) $A = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

a : $\cos x - \sin x$ b : $\cos x + \sin x$ c : $\sin x - \cos x$ d : $-\cos x - \sin x$

2°) $B = \cos(x + y) + \cos(x - y)$

a : $2\cos x \sin y$ b : $2\sin x \cos y$ c : $2\cos x \cos y$ d : $2\sin y \sin x$

3°) $C = \sin(2x) + \sin x$

a : $\sin 3x$ b : $3\sin x$ c : $\sin x(1 + 2\cos x)$ d : $\sin x(\cos x + 1)$

4°) $D = \cos^2 x - \cos^2 y$

a : $\cos 2y - \cos 2x$ b : $\dfrac{\cos 2x - \cos 2y}{2}$ c : $\sin 2y - \sin 2x$ d : $\sin 2x - \sin 2y$

VII. (3,5 points) Soit ABCD un carré de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et de centre O. Soit M un point variable sur [AC]. On note I le projeté orthogonal de M sur (AB) et J le projeté orthogonal de M sur (BC).
On souhaite déterminer la nature du triangle OIJ.

1°) En utilisant le point M, démontrer que : $\overrightarrow{OI} \bullet \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{OB}$.
Que peut-on dire des droites (OI) et (OJ) ?

2°) a) Démontrer rapidement que le triangle AIM est un triangle rectangle isocèle.
b) On pose AI = m. En utilisant la formule d'Al Kashi dans les triangles OAI et OBJ, démontrer que OI = OJ.

3°) Conclure sur la nature du triangle OIJ.

Question bonus (1 point) :

On munit le plan du repère $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$.
On admettra sans démonstration que ce repère est orthonormé.
On admettra également que M a pour coordonnées (m, m) dans ce repère (le réel m a été défini à la question 2°) a)).

En utilisant les coordonnées, retrouver la réponse à la question précédente.

I	II	III	IV	V	VI	VII

$1^{ère}$ S3

Corrigé du contrôle du 17 mai 2010

Critères de réussite de l'exercice sur les fonctions :

Vocabulaire rigoureux : ne pas mélanger la courbe et la fonction, *f* et *f* (*x*).

Critères de réussite pour les exercices sur les suites :

Notations, quantification des égalités.

I.

1°) a) Les limites de *f* en – 1 et en 1 sont infinies, donc les droites d'équation $x=-1$ et $x = 1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}$.

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3-2x^2+2\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to-1}\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right\}$ donc la limite de *f* en – 1 par valeurs inférieures est infinie.

De plus, si $x<-1$, $x^2-1>0$, d'après la règle des signes, on obtient $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$.

f est une fonction rationnelle, donc en – ∞, elle se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré, soit $\dfrac{x^3}{x^2}=x$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2°)

- *f* atteint un extremum local en $-\sqrt{3}$ et en $\sqrt{3}$.
- La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisse $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.

Complément :

La tangente au point d'abscisse 0 est une tangente d'inflexion.
Le point O est un point d'inflexion pour la courbe.

3°) *f* est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout réel *x* différent de – 1 et 1, $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ (après calculs, simplifications et factorisation).

Sur [$\sqrt{3}$; + ∞[, $f'(x)\geq 0$ donc la fonction est croissante.

4°) a) Il suffit de réduire au même dénominateur l'expression proposée.

$$f(x)-(x-2)=\frac{x}{x^2-1}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$ (fonction rationnelle)

Donc la droite d'équation *y* = *x* – 2 est asymptote à $\mathcal{C}$ en – ∞ et +∞.

II.

1°) (u_n) est une suite arithmétique de raison r donc $r=\dfrac{u_{245}-u_{44}}{245-44}=\dfrac{-542-61}{201}=-3$.

$u_0=u_{44}-44\times(-3)=193$

La suite est de premier terme 193 et de raison – 3.

2°) La somme *S* contient 202 (245 – 44 + 1) termes donc d'après la formule sommatoire pour les suites arithmétiques, on a $S=202\times\dfrac{u_{44}+u_{245}}{2}=-48\ 581$.

Version plus détaillée :

(u_n) : suite arithmétique telle que $u_{44}=61$ et $u_{245}=-542$

1°) Calculons la raison *r* de la suite (u_n) et son premier terme u_0.

On a : $r=\dfrac{u_{245}-u_{44}}{245-44}$

$=\dfrac{-542-61}{201}$

$= -3$

$\boxed{r = -3}$

On a donc $u_{44}=u_0-3\times 44$

D'où $u_0=u_{44}+3\times 44$

= 61 + 132

= 193

$\boxed{u_0 = 193}$

2°) Calculons la somme $S=u_{44}+u_{45}+...+u_{245}$.

$S=\left(245-44+1\right)\times\dfrac{u_{44}+u_{245}}{2}$

$=202\times\dfrac{61-542}{2}$

$=202\times\dfrac{-481}{2}$

$= -48\ 581$

$\boxed{S = -48\ 581}$

III.

1°) En exprimant successivement v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis de u_n et enfin de v_n, on démontre que $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$.

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=3$.

2°) $v_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$ (on peut aussi écrire : $u_n=\frac{3}{2^n}+2$)

Version plus détaillée :

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0=5 \\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1 \end{cases}$$

$\forall\, n\in\mathbb{N}\qquad v_n=u_n-2$

1°) **Démontrons que la suite (v_n) est une suite géométrique.**

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N}\qquad v_{n+1}&=u_{n+1}-2\\ &=\frac{1}{2}u_n+1-2\\ &=\frac{1}{2}u_n-1\\ &=\frac{1}{2}(u_n-2)\\ &=\frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=u_0-2=5-2=3$.

2°) **Déduisons-en une expression de v_n en fonction de *n*, puis une expression de u_n en fonction de *n*.**

IV.

1°) La phrase « À chaque rebond, la balle remonte d'une hauteur égale aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur atteint au rebond précédent » se traduit par : $\forall\, n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0=h$.

On a donc $\forall\, n\in\mathbb{N}\quad u_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\times h$.

2°)

La hauteur du quatrième rebond correspond au terme $u_4=\left(\frac{3}{4}\right)^4\times h$

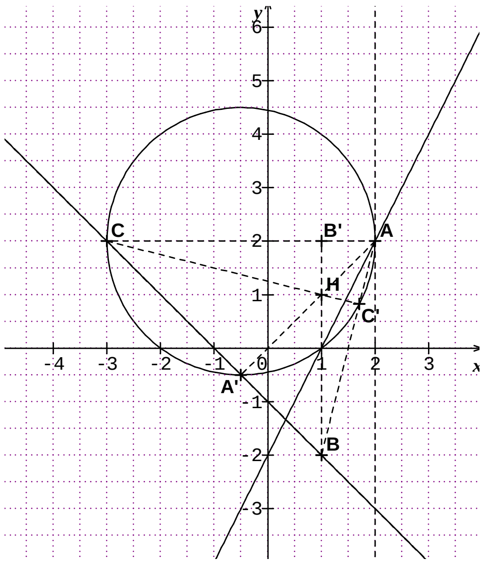
On cherche le plus petit réel h tel que $u_4\geqslant 1{,}70$ (1).

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^4\times h\geqslant 1{,}70\\ &\Leftrightarrow h\geqslant\frac{1{,}7}{\left(\frac{3}{4}\right)^4}\\ &\Leftrightarrow h\geqslant 1{,}7\times\frac{256}{81}\end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on trouve : $1{,}7\times\frac{256}{81}=5{,}37283950...$

Il faut lancer la balle d'une hauteur minimale de 5,4 m au dixième par excès.

V.



A(2 ; 2) B(1 ; – 2) C(–3 ; 2)

1°) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$

2°) Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $x^2 + y^2 + x - 4y - 2 = 0$.

On applique la formule qui donne une équation de cercle dont on connaît un diamètre.
$(x-2)(x+3)+(y-2)(y-2)=0$.
On développe et l'on réduit cette équation pour obtenir le résultat que l'on cherche

3°) Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A s'écrit $x = 2$.

4°) Une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par C s'écrit :
$x+4y-5=0$.

5°) Le point H, orthocentre du triangle ABC, a pour coordonnées : (1 ; 1).

VI. 1°) b 2°) c 3°) c 4°) b

Solution détaillée :

1°) $A=\sqrt{2}\,\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$A=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$A=\sqrt{2}\left(\cos x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$A=\cos x+\sin x$

2°) $B=\cos(x+y)+\cos(x-y)$

$B=\cos x\cos y\cancel{-\sin x\sin y}+\cos x\cos y\cancel{+\sin x\sin y}$

$B=2\cos x\cos y$

3°) $C = \sin(2x) + \sin x$
$C = 2\sin x\cos x + \sin x$ (on applique la formule de duplication pour le sinus : $\sin 2x = 2\sin x\cos x$)
$C = \sin x\,(2\cos x + 1)$
$C = \sin x\,(1 + 2\cos x)$

4°) $D=\cos^2 x-\cos^2 y$

$D=\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1+\cos 2y}{2}$ (on applique la formule de linéarisation de $\cos^2 x$)

$D=\frac{\cos 2x-\cos 2y}{2}$

VII.

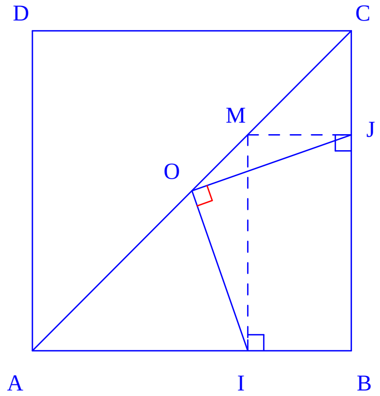
Hypothèses :

ABCD : carré de côté *a*

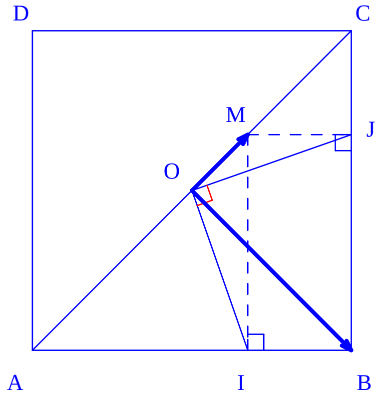
M ∈ [AC]

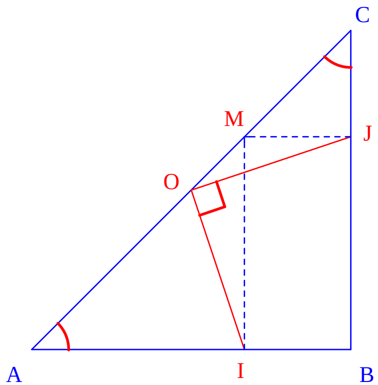
I : projeté orthogonal de M sur (AB)

J : projeté orthogonal de M sur (BC)



On pourrait coder la figure : longueurs des 4 côtés du carré égales mais cela alourdirait la figure.





1°)

• Démontrons que : $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} &= \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MI}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BJ}\right)\\ &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BJ}\end{aligned}$$

On démontre aisément que MIBJ est un rectangle (quadrilatère qui possède trois angles droits)
Donc $\overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{BJ}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MI}) \cdot \overrightarrow{BJ}\\ &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ}\\ &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} \qquad \text{(en effet I} \in \text{(AB), J} \in \text{(BC), (BI)} \perp \text{(BJ) d'où } \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0\text{)}\end{aligned}$$

• Déduisons-en que (OI) $\perp$ (OJ).

ABCD est un carré, donc les droites (OM) et (OB) sont perpendiculaires, le produit scalaire est nul et les droites (OI) et (OJ) sont elles aussi perpendiculaires.

Cette question n'a pas été correctement traitée par beaucoup d'élèves : erreurs de projetés orthogonaux.

Voici par exemple ce que Camille Tixier avait écrit :

On sait que I est le projeté orthogonal de M sur (AB) donc $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OJ}$.
De plus, J est le projeté orthogonal de M sur (BC) donc $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$.
Or M appartient à (OC) donc $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}$.
De plus, O est le centre du carré ABCD donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$.
Donc (OB) et (OM) sont perpendiculaires donc les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

2°)

a) **Démontrons que le triangle AIM est un triangle rectangle isocèle.**

On sait que I est le projeté orthogonal de M sur (AB) donc le triangle AIM est rectangle en I.

De plus, $\widehat{MAI} = \widehat{CAB} = 45°$ (propriété du carré).

On en déduit que le triangle AIM est rectangle isocèle en I.

On utilise la propriété :

« Un triangle rectangle qui possède un angle de 45° est isocèle rectangle. »

b) AI = m

Démontrons que OI = OJ.

D'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle OAI, on a :

$$\text{OI}^2 = \text{AI}^2 + \text{AO}^2 - 2\text{AI} \times \text{AO} \times \cos \widehat{\text{IAO}}$$

$$\text{OI}^2 = m^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2m \times \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\text{OI}^2 = m^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2m \times \frac{2a}{4}$$

$$\text{OI}^2 = m^2 + \frac{a^2}{2} - am$$

D'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle OBJ, on a :

$$\text{OJ}^2 = \text{BJ}^2 + \text{BO}^2 - 2\text{BJ} \times \text{BO} \times \cos \widehat{\text{JOB}}$$

… / …   (BJ = IM = AI = m)

$$\text{OJ}^2 = m^2 + \frac{a^2}{2} - am$$

On a : $\text{OI}^2 = \text{OJ}^2$ donc OI = OJ.

• Il est inutile d'écrire $\text{OI} = \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{2} - am}$.

• Il y a eu des erreurs dans l'écriture de la formule d'Al-Kashi.

3°) **Concluons sur la nature du triangle OIJ.**

En reprenant les résultats des questions précédents, on peut dire que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

Bonus :

La question bonus se fait sans problème. On cherche les coordonnées des différents points :

$\text{O}\left(\frac{a}{2} ; \frac{a}{2}\right)$

$\text{I}(m ; 0)$

$\text{J}(a ; m)$

$\overrightarrow{\text{OI}} \cdot \overrightarrow{\text{OJ}} = 0$

$$\text{OI}^2 = \left(m - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - am + \frac{a^2}{4} = m^2 + \frac{a^2}{2} - am$$

$$\text{OJ}^2 = \left(m - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - am + \frac{a^2}{4} = m^2 + \frac{a^2}{2} - am$$

$\text{OI}^2 = \text{OJ}^2$

Ce qui prouve le même résultat.