Algorithme de dichotomie d'approximation de $\sqrt[3]{2}$

On admet, sans démonstration, que pour tout réel a positif ou nul il existe un unique nombre x tel que l'on ait $x^3 = a$.
Par définition, ce nombre x est appelé la **« racine cubique »** de a.
Ce nombre x est noté $\sqrt[3]{a}$.

Par exemple, la racine cubique de 8 est égale à 2 car $2^3 = 8$. On écrit donc $\sqrt[3]{8} = 2$.

Il est possible de calculer une valeur approchée de la racine cubique d'un nombre à l'aide de la calculatrice (certaines calculatrice ont une touche spéciale pour cela ; sinon, on utilise une puissance avec exposant fractionnaire).

Le but de ce travail est de créer et de programmer un algorithme en utilisant uniquement les opérations élémentaires (addition, soustraction, division, multiplication) afin de déterminer des encadrements de la racine cubique de 2 (c'est-à-dire du nombre x tel que l'on ait $x^3 = 2$).
En effet, on démontre que ce nombre est un nombre irrationnel.

1°) Expliquer sur la copie pourquoi on peut être sûr que $1 < \sqrt[3]{2} < 2$.

2°) Rédiger en langage naturel un algorithme qui respecte les étapes suivantes (on commencera par comprendre ce qui est décrit dans l'encadré ci-dessous).

1. Initialiser deux variables a et b en leur donnant respectivement les valeurs 1 et 2 (nombres de départ de l'encadrement de $\sqrt[3]{2}$).

2. Faire une boucle Pour comportant un nombre N d'itérations :
   (a) Poser $c = \dfrac{a+b}{2}$.
   (b) Si $c^3 < 2$, donner à a la valeur de c, sinon, donner à b la valeur de c.

3. À la fin de la boucle, afficher a et b.

On veillera à respecter les règles usuelles de rédaction d'un algorithme en langage naturel (notamment les règles d'indentation pour la boucle).

3°) Programmer cet algorithme sur calculatrice ou sur Algobox.
Écrire le programme sur la copie en précisant le modèle s'il s'agit d'un programme sur calculatrice.

4°) Indiquer les valeurs de a et b obtenues en faisant tourner le programme pour $\mathrm{N} = 4$.

5°) Le problème de cet algorithme est que l'on ne sait pas à priori quelle sera la précision du résultat.
On peut l'améliorer en remplaçant la boucle « Pour... » par une boucle « Tant que... ».
Rédiger un tel algorithme utilisant une boucle avec test d'arrêt (boucle Tantque) permettant d'obtenir un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-8}.
Programmer cet algorithme sur calculatrice ou sur Algobox.
Écrire le programme correspondant sur la copie.
Écrire l'encadrement obtenu sur la copie : .... $< \sqrt[3]{2} <$ ....

Travail facultatif :

- chercher éventuellement sur une autre source la définition de la racine cubique d'un nombre ;

- chercher des renseignements sur la méthode de dichotomie (on pourra éventuellement s'intéresser à l'étymologie du mot « dichotomie ») ;

- faire une recherche sur le problème de la **duplication du cube** (également appelé **problème de Délos**) qui explique pourquoi on s'intéresse particulièrement au nombre racine cubique de 2 ;

- chercher une autre méthode pour déterminer des valeurs approchées de $\sqrt[3]{2}$ (par exemple, la méthode de Newton avec les tangentes) ; écrire et programmer l'algorithme correspondant.

Corrigé

1°) On a : $1^3 < 2 < 2^3$ donc $1 < \sqrt[3]{2} < 2$.

2°)

Entrée :
Saisir N

Initialisation :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 2

Traitement :
Pour *k* allant de 1 à N **Faire**
  c prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
    Si $c^3 < 2$
      a prend la valeur de *c*
      Sinon *b* prend la valeur de *c*
    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher *a* et *b*

3°) Programme sur calculatrice :

```
: prompt N
: 1 → A
: 2 → B
: For (K,1,N)
: (A + B)/2 → C
: If C^3 < 2
: Then
: C → A
: Else
: C → B
: End
: End
: Disp A, B
```

A la main :
Pour $\mathrm{N} = 4$, on obtient $a = 1,25$ et $b = 1,3125$.
Pour $\mathrm{N} = 7$, $a = 1,2580375$ et $b = 1,266075$.