1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 31 mars 2011 (45 minutes)

Répondre très lisiblement et sans rature, en écrivant au stylo à plume et sans utiliser d'abréviation.
Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors de ce qui est demandé (même au crayon).

Nom : …………………. **Prénom :** …………………. **Note :** ………. **/ 20**

I. (2 points) Question de cours

Citer mot pour mot les règles donnant la limite d'une fonction polynôme ou rationnelle $\boxed{\text{en } +\infty \text{ ou en } -\infty}$.

1°) La limite d'une **fonction polynôme non nulle** $\boxed{\text{en } +\infty \text{ ou en } -\infty}$ est égale à la limite de …………………..

………..

2°) La limite d'une **fonction rationnelle non nulle** $\boxed{\text{en } +\infty \text{ ou en } -\infty}$ est égale à la limite du ………………..

………..

II. (3 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}\left(3 - x^2\right)$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = ... \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - x^2\right) = ... \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ...$$

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto x^3\left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^2}\right)$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = ... \\ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^2}\right) = ... \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = ...$$

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^3-2}{(x-1)^2}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-2\right)=\text{.........}\\[2em]\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=\text{.........}\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to 1}h(x)=\text{..............}$$

III. (4 points) On considère la fonction $f : x \mapsto x-\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Compléter directement les égalités de limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=$..............	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=$..............	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$..............	$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$..............

La dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$.

Le tableau donnant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f est donné ci-dessous.

Compléter ce tableau à l'aide des limites précédentes.

x	$-\infty$			0			$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+		||		+	
Variations de f	……	$\nearrow$	……	||	……	$\nearrow$	……

IV. (5 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{1-2x-3x^2}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en rédigeant brièvement puis $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} f(x)$ en détaillant bien la démarche pour cette dernière limite.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……….
.

V. (6 points) On considère une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

1°) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.
Compléter directement les égalités de limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2°) Déterminer les asymptotes à la courbe **C** représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- La courbe **C** admet les droites d'équations ……………… et ……………… pour asymptotes horizontales respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

- La courbe **C** admet la droite d'équation ……………… pour asymptote verticale.

Corrigé du contrôle du 31 mars 2011

I. Question de cours

Remarque le mot degré ne prend jamais de s au singulier.

1°) La limite d'une **fonction polynôme non nulle** $\boxed{\text{en } +\infty \text{ ou en } -\infty}$ est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

2°) La limite d'une **fonction rationnelle non nulle** $\boxed{\text{en } +\infty \text{ ou en } -\infty}$ est égale à la limite du quotient simplifié de ses monômes de plus haut degré.

II.

1°) $f : x \mapsto \sqrt{x}\left(3-x^2\right)$. Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-x^2\right) = -\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2°) $g : x \mapsto x^3\left(-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)$. Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right) = -2\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

3°) $h : x \mapsto \dfrac{x^3-2}{(x-1)^2}$. Déterminons $\lim\limits_{x\to1} h(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} \left(x^3-2\right) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x\to1} (x-1)^2 = 0^+\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to1} h(x) = -\infty$$

III. $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

IV. $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{1-2x-3x^2}$

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

La limite d'une fonction rationnelle non nulle $\boxed{\text{en } +\infty \text{ ou en } -\infty}$ est égale à la limite du quotient simplifié de ses monômes de plus haut degré.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{-3x^2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3x} \right) = 0$

Déterminons $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} f(x)$.

Considérons le polynôme $-3x^2 - 2x + 1$.

– 1 est une racine évidente ; par produit, on obtient l'autre racine : $\dfrac{1}{3}$.

On applique la règle du signe d'un polynôme du second degré.

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x^2 - 2x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} (x-1) \\ \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} \left(-3x^2-2x+1\right) = 0^- \end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} f(x) = +\infty$

V.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

1°) Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

2°) Déterminons les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- La courbe $\mathcal{C}$ admet les droites d'équations $y = 2$ et $y = 0$ pour asymptotes horizontales respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

- La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote verticale.