1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 8 avril 2011 (1 h 30)

Répondre très lisiblement, sans rature, sans abréviation, en écrivant au stylo à plume.
Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors de ce qui est demandé (même au crayon).
Tirer les traits de fraction à la règle ainsi que les symboles de racines carrées.

Nom : …………………………… **Prénom :** …………………………… **Note : …… / 20**

I. (4 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - \sqrt{n+1}$.

1°) Calculer le centième terme de la suite. Effectuer les calculs au brouillon.

$u_{......}$ = ... (écrire un seul résultat)

2°) Le but de cette question est de déterminer le sens de variation de la suite (u_n) en utilisant une méthode de comparaison directe (méthode de raisonnement déductif, par inégalités successives).

Compléter le raisonnement suivant :

Soit n un entier naturel quelconque.

On a : $u_n = 3 - \sqrt{n+1}$ et $u_{n+1} =$ ....

Dans la suite, compléter avec le signe < ou > suivant les cas.

On a : $n + 1$ …….. $n + 2$.

Donc $\sqrt{n+1}$ …….. $\sqrt{n+2}$ car la fonction racine carrée est ……………………………………………………..

sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On multiplie les deux membres de l'inégalité par …………. On obtient l'inégalité :

$-\sqrt{n+1}$ …….. $-\sqrt{n+2}$

On ajoute ……… à chaque membre de cette inégalité. On obtient l'inégalité :

$3-\sqrt{n+1}$ …….. $3-\sqrt{n+2}$

On en déduit que u_n …….. u_{n+1}.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : u_n …….. u_{n+1} (phrase quantifiée explicitement).

Par conséquent, la suite (u_n) est ………………………………………………………….. à partir de l'indice 0.

3°) Compléter sans explication la phrase suivante :

Les termes de la suite (u_n) sont négatifs ou nuls à partir à partir de l'indice ……………….. .

Compléter l'implication suivante : $n \geqslant$ …….. $\Rightarrow$ $u_n \leq 0$

II. (2 points) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$.

1°) Compléter sans expliquer la phrase suivante :

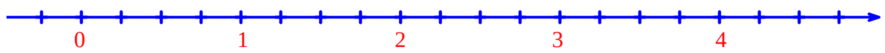
La suite (u_n) est définie à partir de l'indice ……….. (mettre le nombre)

2°) Une autre expression de u_n est (entourer la ou les réponse(s) choisie(s)) :

$1 + \frac{1}{n}$	$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$	$n\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}$

III. (2 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2^{n-2}}$.

Placer les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 sur la droite réelle tracée ci-dessous. Effectuer les calculs au brouillon.
Marquer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 au-dessus de l'axe.

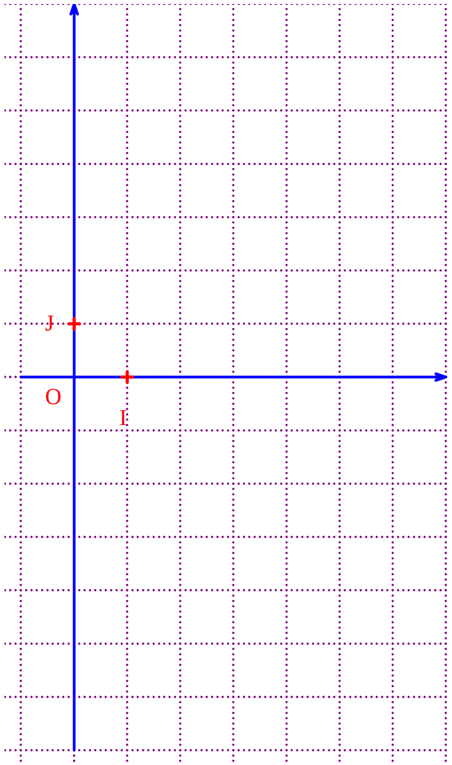


u_0 = ………	u_1 = ………	u_2 = ………	u_3 = ………	u_4 = ………

IV. (2 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n \times n$.

1°) Sur le graphique ci-dessous, placer en bleu ou en vert les points représentant les termes de la suite u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.

Il s'agit donc de placer les points M_i de coordonnées (i, u_i) pour $i \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Marquer les points par des « points » et non par des croix.
Mettre le nom des points M_0, M_1, …. M_6.



2°) La suite (u_n) est-elle monotone ? Répondre par oui et non, sans justifier.

Réponse : ………………

V. (3 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

1°) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de *n*. Donner le résultat sous la forme d'un seul quotient ; développer et réduire le numérateur ; ne pas développer le dénominateur.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{}{}$

2°) Écrire $u_n - 1$ en fonction de *n*. Donner le résultat sous la forme d'un seul quotient.

$u_n - 1 = \dfrac{}{}$

3°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n). Détailler la démarche en écrivant une idée par ligne.

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

VI. (2 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 15$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1-u_n}{2}$.

1°) Calculer la valeur de u_2.

$u_2 =$ .... (écrire un seul résultat)

2°) On désire rédiger un algorithme permettant d'afficher le terme d'indice *p* (*p* étant un entier naturel donné) pour la suite considérée dans cet exercice.
Voici deux propositions d'algorithmes rédigés en langage naturel qui répondent à cette question.
Compléter ces algorithmes.

```
Variables : p, i, entiers naturels ; u, réel
Début
Entrée
Saisir p
Initialisation
u prend la valeur 15
Traitement
Pour i allant de 1 à p (avec un pas de 1) Faire
    | u prend la valeur ……………….
FinPour
Sortie
Afficher u
Fin
```

```
Variables : p, i, entiers naturels ; u, réel
Début
Entrée
Saisir p
Initialisations
u prend la valeur 15
i prend la valeur 1
Traitement
Tant que i ⩽ p Faire
    | u prend la valeur ……………….
    | i prend la valeur i + 1
FinTantque
Sortie
Afficher u
Fin
```

Question bonus : réaliser le programme correspondant à l'un de ces deux algorithmes sur calculatrice.
Tester ce programme pour $p = 3$ et donner une valeur décimale approchée de u_{20} à 10^{-6} près.

VII. (5 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + n + 1$.

1°) Calculer la valeur de u_1, u_2, u_3. Effectuer les calculs au brouillon et ne mettre qu'un seul résultat dans chaque case.

$u_1 =$	$u_2 =$	$u_3 =$ ....

2°) On donne ci-dessous trois expressions en fonction de *n*. L'une d'elle est la formule explicite de u_n en fonction de *n*. Entourer la formule choisie sans justifier.

$2^n - 1$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$n^3 - \frac{5}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$

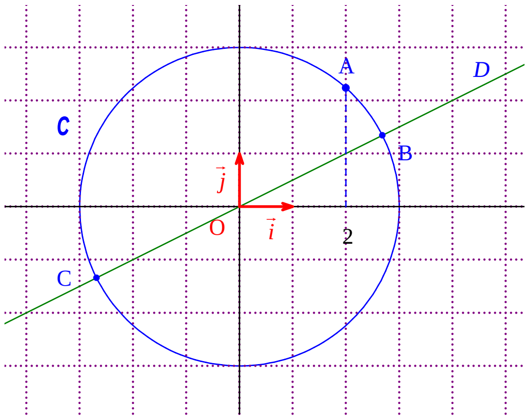
3°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel qui permet d'afficher le terme u_p où *p* est un entier naturel donné. Compléter cet algorithme.

```
Variables : p, i, entiers naturels ; u, réel
Début
Entrée
Saisir p
Initialisation
u prend la valeur 0
Traitement
Pour i allant de 1 à p (avec un pas de 1) Faire
    | u prend la valeur …………..
FinPour
Sortie
Afficher u
Fin
```

Question facultative : réaliser le programme correspondant à cet algorithme sur calculatrice et vérifier qu'il fonctionne pour les valeurs de u_1, u_2, u_3 trouvées à la question 1°).

Dans les exercices VIII et IX, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

VIII. (8 points) Sur la figure ci-dessous, on a tracé le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 ainsi que la droite *D* d'équation $y=\dfrac{x}{2}$. Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.



1°) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$. Écrire directement une équation sans rien écrire d'autre.

……………………………………..…………………………… (une seule équation)

2°) Déterminer l'ordonnée (valeur exacte) du point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 situé au-dessus de l'axe des abscisses.

$y_A=$.................. (écrire un seul résultat)

3°) Déterminer les abscisses des points d'intersection B et C de $\mathcal{C}$ et *D*.

Donner les valeurs exactes sous la forme $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ où *a* et *b* sont des entiers.

$x_B=$.................. (écrire un seul résultat)	$x_C=$.................. (écrire un seul résultat)

4°) Quel est l'ensemble *E* des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient l'inéquation $x^2+y^2\leqslant 9$?

L'ensemble *E* est ………………………………………...………...…………………………

IX. (12 points) Faire cet exercice sur la feuille annexe à insérer à l'intérieur de la copie (mettre son nom en haut).
On apportera un soin tout particulier à la rédaction, aux notations…

On considère les points A(8 ; 0) et B(2 ; 4). On note C le symétrique de B par rapport à O.
On note *D* la droite d'équation cartésienne $3x-4y+13=0$.
1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par C et perpendiculaire à (AB).
On pourra donner les coordonnées de C directement sans explication.
2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ' passant par A et perpendiculaire à *D*.
3°) On note I le milieu de [AB]. Déterminer la distance OI.
4°) On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-8x-4y-16=0$.
Déterminer les coordonnées de son centre Ω et son rayon *r*.

Quelques conseils de rédaction (à respecter, bien évidemment) :

Questions 1°) et 2°) :

Pour la détermination des équations de droites, il est demandé de respecter la méthode habituelle :

« Soit M(*x* ; *y*) un point quelconque du plan.

M ∈ Δ ⇔ ....

⇔ .... »

Conclure clairement : « Une équation cartésienne de Δ s'écrit …………………………… ».

Ne pas introduire de nouveau point autre que ce point M.

Question 4°) :

On commencera à mettre l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ sous une autre forme en rédigeant de la manière suivante.

« Soit M(*x* ; *y*) un point quelconque du plan.

M ∈ $\mathcal{C}$ ⇔ ....

⇔ .... »

Conclure clairement : « $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω(....... ; ....) et de rayon $r=$…. ».

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
4	2	2	2	3	2	5	8	12

Corrigé du contrôle du 8 avril 2011

I. (u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - \sqrt{n+1}$

1°) Calculons le centième terme de la suite.

$$\boxed{u_{99} = -3}$$

2°) Soit n un entier naturel quelconque.

On a : $u_n = 3 - \sqrt{n+1}$ et $u_{n+1} = 3 - \sqrt{n+2}$.

On a : $n + 1 < n + 2$.

Donc $\sqrt{n+1} < \sqrt{n+2}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Il est important de mentionner le « strictement ».

On multiplie les deux membres de l'inégalité par – 1. On obtient l'inégalité :

$-\sqrt{n+1} > -\sqrt{n+2}$

On ajoute 3 à chaque membre de cette inégalité. On obtient l'inégalité :

$3 - \sqrt{n+1} > 3 - \sqrt{n+2}$

On en déduit que $u_n > u_{n+1}$.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > u_{n+1}$ (phrase quantifiée explicitement).

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°)

Phrase à compléter : Les termes de la suite (u_n) sont négatifs ou nuls à partir à partir de l'indice 8.

Implication à compléter : $n \geqslant 8 \Rightarrow u_n \leq 0$

II. $u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$

1°)

La suite (u_n) est définie à partir de l'indice 1.

2°) Une autre expression de u_n est :

$\cancel{1+\frac{1}{n}}$	$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$	$n\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}$

Justification :

Pourquoi la première proposition est fausse ?

La racine carrée d'une somme n'est pas égale à la somme des racines carrées.
On peut aussi prendre un contre-exemple.

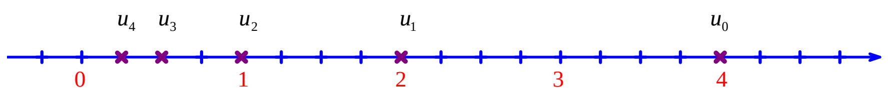
Les deux propositions suivantes sont justes.

$$u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$

$\sqrt{n^2} = n$ car n est un entier naturel donc positif ou nul.

$$u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = n\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}$$

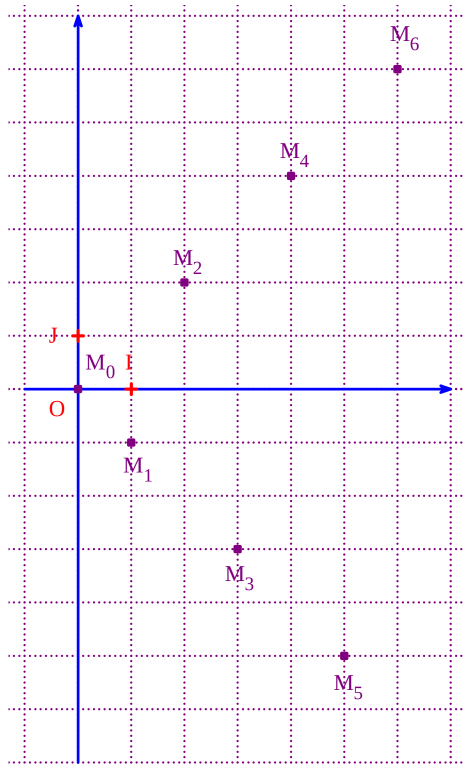
III. (u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2^{n-2}}$



$u_0 = 4$	$u_1 = 2$	$u_2 = 1$	$u_3 = \frac{1}{2}$	$u_4 = \frac{1}{4}$

IV.

1°)



On ne relie pas les points. La représentation graphique de la suite est constituée de points isolés (« nuage de points »).

2°) La suite (u_n) n'est pas monotone.
En effet, dire qu'une suite est monotone revient à dire qu'elle est soit croissante soit décroissante.

V. (u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

1°) Exprimons $u_{n+1} - u_n$ en fonction de *n*.

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}}$$

Justification :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{n+2}{n+3}-\frac{n+1}{n+2}\\&=\frac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}\\&=\frac{(n^2+4n+4)-(n^2+4n+3)}{(n+2)(n+3)}\\&=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

2°) **Exprimons u_n-1 en fonction de n.**

$$\boxed{u_n-1=-\frac{1}{n+2}}$$

3°) **Étudions le sens de variation de la suite (u_n).**

On utilise la méthode par différence.

D'après le résultat du 1°), $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Or ce quotient est positif.

Donc $\forall\, n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n>0$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

VI. (u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=15$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{1-u_n}{2}$

1°)

$$\boxed{u_2=4}$$

2°)

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables : p, i, entiers naturels ; u, réel **Début** **Entrée** Saisir p **Initialisation** u prend la valeur 15 **Traitement** **Pour** i allant de 1 à p (avec un pas de 1) **Faire** u prend la valeur $\frac{1-u}{2}$ **FinPour** **Sortie** Afficher u **Fin**	**Variables :** p, i, entiers naturels ; u, réel **Début** **Entrée** Saisir p **Initialisations** u prend la valeur 15 i prend la valeur 1 **Traitement** **Tant que** $i\leqslant p$ **Faire** u prend la valeur $\frac{1-u}{2}$ i prend la valeur $i+1$ **FinTantque** **Sortie** Afficher u **Fin**

Question bonus :

Pour u_{20}, la calculatrice affiche 0,3333473206.
On en déduit qu'une valeur décimale approchée de u_{20} à 10^{-6} près est 0,333347.

VII. (u_n) : $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n+n+1$

1°)

$u_1=1$	$u_2=3$	$u_3=6$

Explication :

$u_1=u_0+0+1=0+1=1$ (on remplace n par 0 dans la relation de récurrence)
$u_2=u_1+1+1=1+1+1=3$ (on remplace n par 1 dans la relation de récurrence)

$u_3 = u_2 + 2 + 1 = 3 + 3 = 6$ (on remplace n par 2 dans la relation de récurrence)

2°) La formule explicite de u_n en fonction de n est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3°) **Algorithme :**

Variables : p, i, entiers naturels ; u, réel

Début

Entrée

Saisir p

Initialisation

u prend la valeur 0

Traitement

Pour i allant de 1 à p (avec un pas de 1) **Faire**

  u prend la valeur $u + i + 1$

FinPour

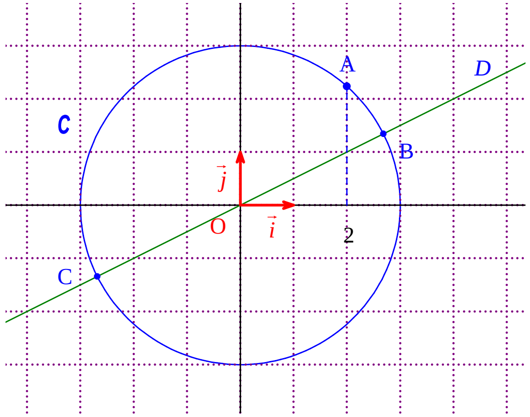
Sortie

Afficher u

Fin

VIII. $\mathcal{C}$: cercle de centre O et de rayon 3

D : $y = \dfrac{x}{2}$



1°) Équation du cercle $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 9$

2°) Ordonnée du point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 situé au-dessus de l'axe des abscisses :

$$\boxed{y_A = \sqrt{5}}$$

3°) Abscisses des points d'intersection B et C de $\mathcal{C}$ et D.

$x_B = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$	$x_C = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

Justification :

L'équation donnant les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D s'écrit : $x^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 9$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{4} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2}{4} = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{36}{5}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{36}{5}}$$

$\Leftrightarrow\ x=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ ou $x=-\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

4°) $E=\{\ \mathrm{M}\ (x, y)\in P\ /\ x^2+y^2\leqslant 9\ \}$

L'ensemble E est le disque fermé de centre O et de rayon 3.

Justification :

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

$$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2\leqslant 9$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{OM}^2\leqslant 9$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{OM}\leqslant 3$$

IX.

Pour cet exercice de rédaction, attention à ne pas faire de faute d'orthographe sur l'adjectif « CARTESIEN » (pas de h).

Attention également au bon emploi du mot « SOIT ». Il n'y a pas lieu de l'utiliser en dehors de l'expression « Soit M(x, y) un point quelconque du plan ».

1°) **Déterminons une équation cartésienne de Δ.**

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}=-6 \\ y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}=4 \end{array}\right.$$

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

$\mathrm{M}\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{CM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux $\qquad \overrightarrow{\mathrm{CM}}\left|\begin{array}{l} x+2 \\ y+4 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{CM}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)\times(-6)+4\times(y-4)=0$$
$$\Leftrightarrow -6x-12+4y-16=0$$
$$\Leftrightarrow -6x+4y-28=0$$
$$\Leftrightarrow -3x+2y-14=0$$
$$\Leftrightarrow 3x-2y+14=0$$

Une équation cartésienne de Δ s'écrit $3x-2y+14=0$.

2°) **Déterminons une équation cartésienne de Δ'.**

Le vecteur $\vec{v}$ (4 ; 3) est un vecteur directeur de D.

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

$\mathrm{M}\in\Delta' \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\bullet\vec{v}=0$$
$$\Leftrightarrow 4(x-8)+3y=0$$
$$\Leftrightarrow 4x+3y-32=0$$

Une équation cartésienne de Δ' s'écrit $4x+3y-32=0$.

3°) **Calculons la distance OI.**

I est le milieu de [AB] donc $\mathrm{I}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{I}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}=5 \\ y_{\mathrm{I}}=\dfrac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}=2 \end{array}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\left|\begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array}\right.$ donc $\mathrm{OI}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

4°) $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-8x-4y-16=0$

Déterminons les coordonnées du centre Ω de $\mathcal{C}$ et son rayon r.

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

$$\mathrm{M}\in\mathcal{C} \Leftrightarrow x^2+y^2-8x-4y-16=0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2-16+(y-2)^2-4-16=0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=36$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=6^2$$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω(4 ; 2) et de rayon $r=6$.