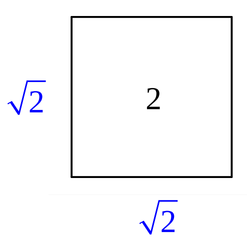
La méthode de Héron

Des scribes de Babylone aux ordinateurs modernes

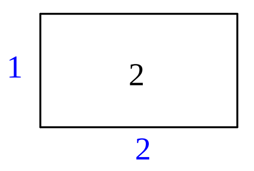
Le but du travail est de présenter et de programmer un algorithme permettant de déterminer des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ en utilisant les 4 opérations élémentaires (mais sans utiliser la touche de racine carrée de la calculatrice !).

Le procédé décrit ci-dessous est déjà employé par les Babyloniens deux millénaires avant notre ère pour obtenir une approximation du nombre noté aujourd'hui $\sqrt{2}$. Il est connu sous le nom d'**algorithme de Babylone**.
Cela dit, il semble que ce soit plutôt le mathématicien Héron (II^{e} siècle après Jésus-Christ) qui ait eu l'idée d'un procédé itératif.

$\sqrt{2}$ est la longueur du côté d'un carré d'aire 2. Des constructions de rectangles d'aires 2 permettent, par des calculs successifs de moyennes de côtés, d'approcher un tel carré.



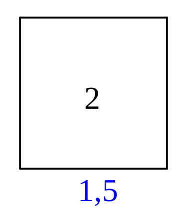
1ère étape : On part d'un rectangle d'aire 2 dont l'un des côtés a pour longueur 2. L'autre côté a donc pour longueur 1.



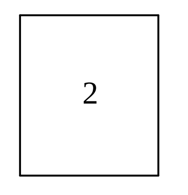
Il s'agit d'un rectangle, non d'un carré.

2^{e} étape : On fait la moyenne de la longueur et de la largeur du rectangle précédent : 1,5.

On considère un rectangle d'aire 2 dont un côté a pour longueur 1,5. L'autre côté a donc pour longueur $\frac{4}{3}$.



3^{e} étape : On recommence la même démarche que précédemment.



On conçoit aisément (même si on ne le démontre pas ici) que l'on s'approche étape par étape de plus en plus d'un carré d'aire 2.

Question 1 – Valeurs approchées de $\sqrt{2}$

On pose $a_1 = 2$.

a) Calculer « à la main » les nombres $a_2 = \dfrac{1}{2}\left(a_1 + \dfrac{2}{a_1}\right)$, $a_3 = \dfrac{1}{2}\left(a_2 + \dfrac{2}{a_2}\right)$ … et ainsi de suite jusqu'à a_5.
Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b) Recopier et compléter le tableau suivant et y recopier les valeurs trouvées précédemment.

	Valeur exacte (sous forme fractionnaire)	**Valeur décimale approchée d'ordre 8 par défaut**
a_2		
a_3		
a_4		
a_5		

On démontre que l'on obtient, en poursuivant les calculs de la même façon, des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$.

Questions 2 – Valeurs approchées de $\sqrt{p}$ avec *p* entier naturel, $p \geqslant 2$

On reprend la suite précédente avec $a_1 = p$; $a_2 = \dfrac{1}{2}\left(a_1 + \dfrac{p}{a_1}\right)$; $a_3 = \dfrac{1}{2}\left(a_2 + \dfrac{p}{a_2}\right)$; … .

On démontre que l'on obtient des valeurs de plus en plus précises de $\sqrt{p}$.

a) Écrire un algorithme en langage naturel qui lit *p*, un entier naturel *n*, avec $n \geqslant 2$, et qui calcule et affiche les termes successifs a_2, a_3, … jusqu'à a_n.

b) Réaliser un programme sur calculatrice.
Écrire le programme sur la copie en indiquant la marque de la calculatrice.

c) Faire des essais avec diverses valeurs de *p* pour départ, observer la précision des valeurs approchées obtenues.

Faire des essais, notamment avec un carré parfait comme 64 ou 25 pour valeur de *p*.

Facultatif : Faire quelques recherches sur Héron, mathématicien de l'antiquité qui a découvert plusieurs choses (notamment une formule qui donne l'aire d'un triangle quelconque en fonction des longueurs des côtés).

Solution

Question 1 – Valeurs approchées de $\sqrt{2}$

On pose $a_1 = 2$.

a) Calculer « à la main » les nombres $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)$, $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right)$, et ainsi de suite jusqu'à a_5.

Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2\times\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{6} + \frac{8}{6}\right) = \frac{17}{12}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{2}{a_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2\times 12}{17}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{577}{204} = \frac{577}{408}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}\left(a_4 + \frac{2}{a_4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + 2\times\frac{408}{577}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{665857}{235416} = \frac{660961}{463908}$$

b) Recopier et compléter le tableau suivant et y recopier les valeurs trouvées précédemment.

	Valeur exacte (sous forme fractionnaire)	**Valeur décimale approchée d'ordre 8 par défaut**
a_2	$\frac{3}{2}$	1,5
a_3	$\frac{17}{12}$	1,41666667
a_4	$\frac{577}{408}$	1,41421569
a_5	$\frac{660961}{463908}$	1,42476741

On démontre que l'on obtient, en poursuivant les calculs de la même façon, des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$.

Questions 2 – Valeurs approchées de $\sqrt{p}$ avec p entier naturel, $p \geqslant 2$

On reprend la suite précédente avec $a_1 = p$; $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{p}{a_1}\right)$; $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{p}{a_2}\right)$; … .

On démontre que l'on obtient des valeurs de plus en plus précises de $\sqrt{p}$.

a) Écrire un algorithme en langage naturel qui lit p, un entier naturel n, avec $n \geqslant 2$, et qui calcule et affiche les termes successifs a_2, a_3, … jusqu'à a_n.

Entrée :
Saisir p (entier naturel supérieur ou égal à 2)
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur p

Traitement et sorties :
Pour i allant de 1 à $n-1$ **Faire**
  a prend la valeur $\frac{1}{2}\left(a + \frac{p}{a}\right)$
  Afficher a
FinPour

/!\ Il faut faire très attention au « i allant de 1 à $n-1$ » et non « i allant de 1 à n. »
On peut aussi remplacer « i allant de 1 à $n-1$ » par « i allant de 2 à n » qui est cependant moins logique.

b) Réaliser un programme sur calculatrice.

Écrire le programme sur la copie en indiquant la marque de la calculatrice.

Programme pour calculatrice TI :

```
: Prompt P
: Prompt N
: Prompt F
: P → A
: For(I,1, N –1)
: 0.5(A+(P/A)) → A
: Disp A
: Pause
: End
```

Pour la syntaxe de l'instruction « 0.5(A+(P/A)) → A », les parenthèses autour de P/A sont facultatives.

On peut écrire 0.5(A+P/A) → A.

Commentaire : On rajoute une « Pause » pour que le programme aille moins vite et laisse le temps de voir les nombres affichés.

c) Faire des essais avec diverses valeurs de *p* pour départ, observer la précision des valeurs approchées obtenues.

Faire des essais, notamment avec un carré parfait comme 64 ou 25 pour valeur de *p*.

Facultatif : Faire quelques recherches sur Héron, mathématicien de l'antiquité qui a découvert plusieurs choses (notamment une formule qui donne l'aire d'un triangle quelconque en fonction des longueurs des côtés).