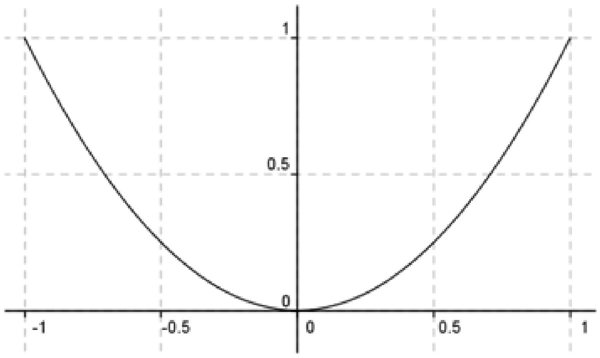
Longueur d’un arc de parabole

L’objectif de ce travail est de déterminer une valeur approchée de la longueur **l** de la courbe **C** de la fonction carré tracée sur l’intervalle [– 1 ; 1] dans un repère orthonormé (O, I, J). C’est un problème intéressant !

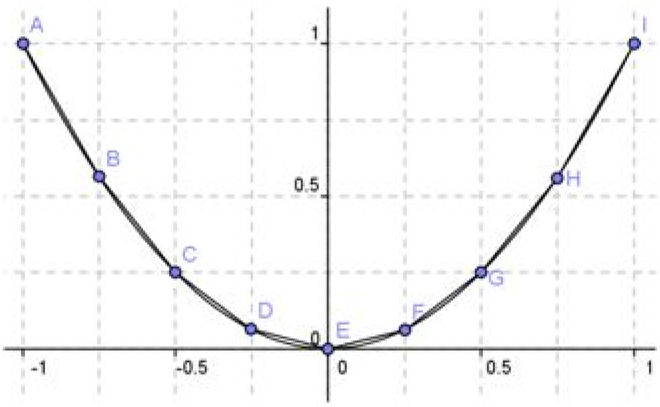
L’unité de longueur est l’unité des axes du repère.



On propose dans ce travail une méthode permettant de trouver une valeur approchée de **l**. Cette méthode est inspirée de la méthode pour déterminer une valeur approchée du périmètre d’un cercle par la méthode d’Archimède (qui consiste à inscrire des polygones réguliers à l’intérieur d’un cercle).

Question 1 – On prend des points dont les abscisses sont régulièrement espacées de 0,25 entre – 1 et 1. On joint ces points par des segments. On calcule la somme des longueurs des segments.

Calculer la longueur de la ligne polygonale ABCDEFGHI.

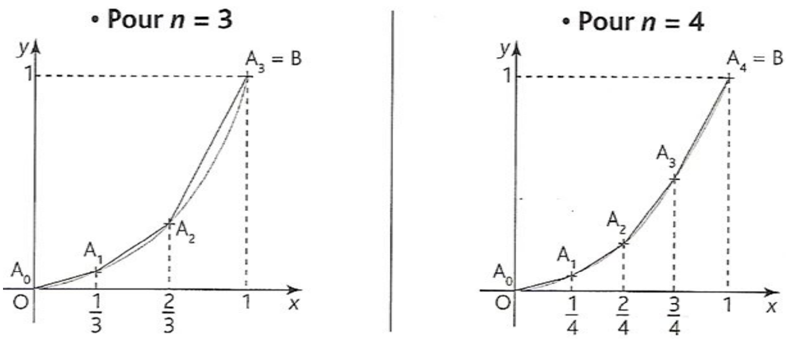


Expliquer pourquoi il suffit de s’intéresser à la longueur de la partie de la courbe sur l’intervalle [0 ; 1].

Question 2 – On va s'intéresser à la longueur de l'arc de parabole entre les points O (origine du repère de coordonnées (0 ; 0)) et le point B de coordonnées (1 ; 1).

On partage le segment [0, 1] en n intervalles où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On va additionner les longueurs des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ … où A_0, A_1, A_2, A_3 sont les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ jusqu'à $\frac{n}{n}=1$, qui donne le point B de coordonnées (1 ; 1).
On observera que le point A_0 est confondu avec le point O (origine du repère de coordonnées (0 ; 0)).
On note L la somme $A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$ (avec $A_n = B$).



Repasser en rouge la ligne polygonale qui joint O à B sur chacune des figures ci-dessus.

Ecrire un algorithme en langage naturel permettant de réaliser d'afficher le double de la longueur L de la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (le double de L est une valeur approchée de ℓ).

Une piste : utiliser une boucle Pour…

Question 3 – Programmer cet algorithme sur machine (calculatrice ou ordinateur avec le logiciel Algobox). Ecrire le programme en indiquant la marque de la calculatrice dans le cas d'un programme sur calculatrice.

Indiquer la valeur approchée de ℓ obtenue en faisant tourner le programme pour n = 100 puis pour n = 1000.

Complément :

Utiliser *Geogebra* pour tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$.
Dans la barre de saisie, taper : Longueur[f, - 1, 1].
On obtient ainsi une valeur approchée de l'arc de courbe sur l'intervalle [– 1 ; 1].

Note culturelle :

Il est possible d'obtenir la valeur exacte de l'arc de courbe sur l'intervalle [– 1 ; 1]. Mais l'expression utilise une formule et des techniques qui sont étudiées dans le supérieur.