



Répondre très lisiblement, sans rature, sans abréviation, en écrivant au stylo à plume.  
Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors des réponses (même au crayon).

**I. (9 points)** On justifiera précisément le raisonnement dans chaque cas.

**Attention à la rédaction qui doit être soignée et précise.**

**Il n'est pas demandé de donner l'ensemble de définition de la fonction.**

**Tirer tous les traits de fraction à la règle.**

1°) On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = \dots\dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$
--

2°) On considère la fonction  $g : x \mapsto \frac{1 - x^2}{x^2 + x + 2}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  (donner une phrase d'explication).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

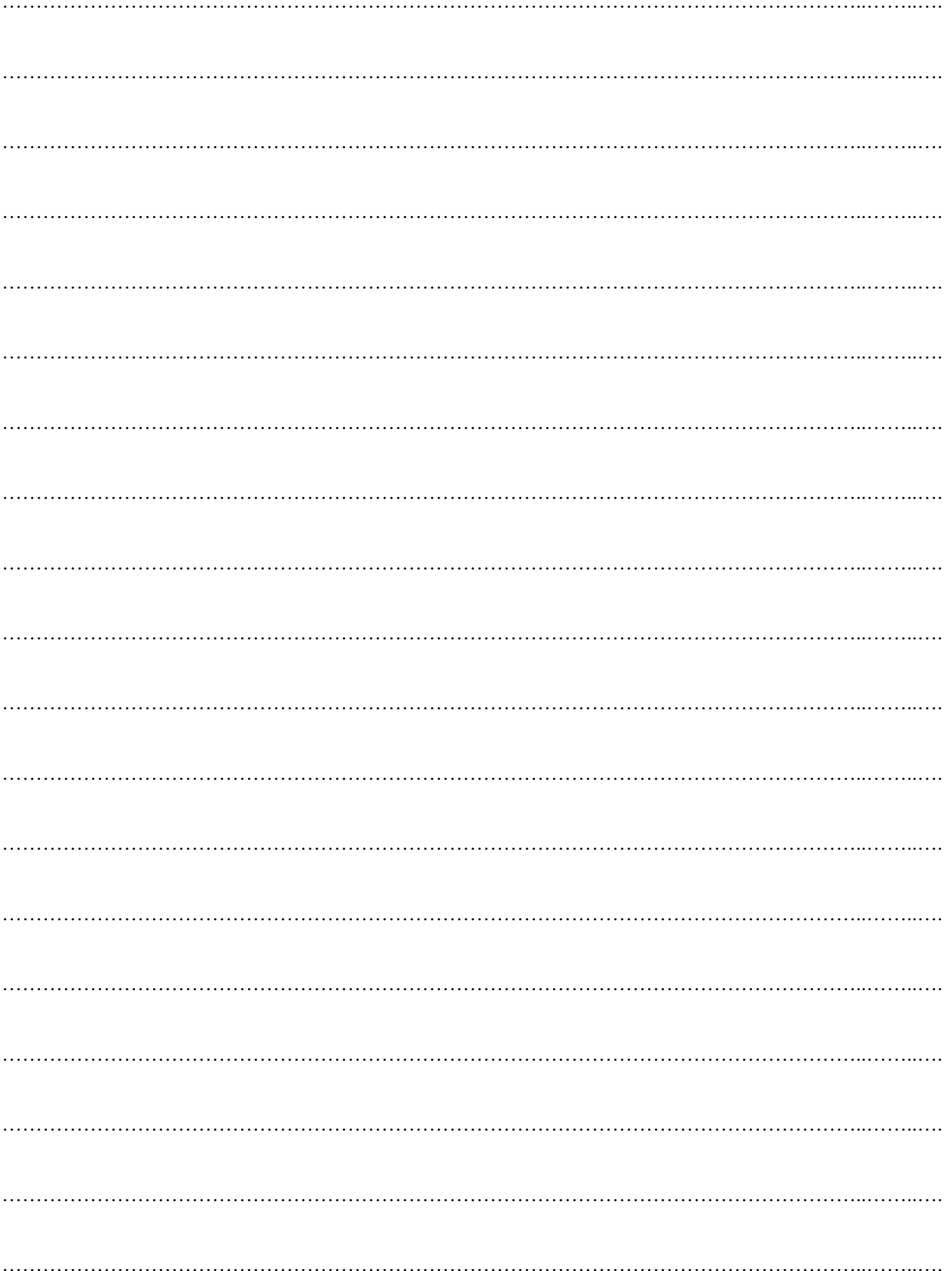
.....

.....

.....

3°) On considère la fonction  $h : x \mapsto \frac{x - 1}{x^2 + x}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x)$ .





.....  
 .....  
 -----  
**III. (10 points)** Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A du plan  $P$ . On note I et J les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[AC]$ . Faire une figure au brouillon.

Le but de l'exercice est de déterminer les ensembles  $E$  et  $F$  ainsi définis (voir annexe pour les notations) :

$$E = \left\{ M \in P / \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 \right\} ; F = \left\{ M \in P / (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0 \right\}.$$

Pour tout point M du plan  $P$ , on a :  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \dots\dots\dots$  et  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \dots\dots\dots$  .

<b>Recherche de l'ensemble E</b>	<p>Soit M un point quelconque du plan <math>P</math>.</p> <p><math>M \in E</math> si et seulement si <math>\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0</math></p> <p>si et seulement si .....</p> <p>si et seulement si .....</p> <p>si et seulement si .....</p> <p>L'ensemble <math>E</math> est .....</p>
----------------------------------	--

<b>Recherche de l'ensemble F</b>	<p>Soit M un point quelconque du plan <math>P</math>.</p> <p><math>M \in F</math> si et seulement si <math>(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0</math></p> <p>si et seulement si .....</p> <p>si et seulement si .....</p> <p>si et seulement si .....</p> <p>L'ensemble <math>F</math> est .....</p>
----------------------------------	--

#### IV. (6 points) Ensembles de points et algorithmes

Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

1°) On considère l'ensemble  $E$  des points du graphique ci-contre (il n'y a pas plus de points que ceux qui figurent sur le graphique).

Décrire l'ensemble  $E$  en complétant l'égalité ci-dessous :

$$E = \{ M(x; y) \in P / x \in [\dots; \dots], x \text{ multiple entier de } \dots, y = \dots \}$$

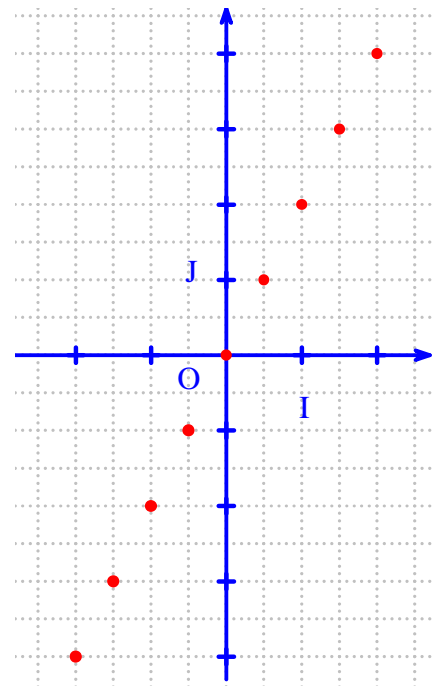
(cela se lit : «  $E$  est l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan  $P$  tels que l'on ait  $x \in [\dots; \dots]$ ,  $x$  multiple entier de  $\dots$  et  $y = \dots$  »).

2°) Afin de réaliser la figure, on considère les algorithmes ci-dessous qui permettent de dessiner les points.

L'algorithme de gauche est rédigé avec une boucle **Pour** l'algorithme de droit est rédigé avec une boucle **Tantque**.

Compléter les pointillés dans ces deux algorithmes.

Les variables sont  $i$ , entier ;  $x$  et  $y$ , réels.



##### Initialisation :

$x$  prend la valeur  $-2$

##### Traitement et sorties :

**Pour**  $i$  allant de 1 à .... (avec un pas de 1) **Faire**

$y$  prend la valeur .....

    Placer le point  $M(x; y)$

$x$  prend la valeur  $x+0,5$

**FinPour**

##### Initialisation :

$i$  prend la valeur 1

$x$  prend la valeur  $-2$

##### Traitement et sorties :

**Tantque**  $i \leq \dots$  **Faire**

$y$  prend la valeur .....

    Placer le point  $M(x; y)$

$x$  prend la valeur  $x+0,5$

$i$  prend la valeur  $i+1$

**FinTantque**

3°) Sur le même graphique, représenter en vert ou en bleu (mais pas au crayon) l'ensemble

$$F = \{ M(x; y) \in P / x \in [-2; 2], x \text{ entier relatif}, y = 2 - x \}$$

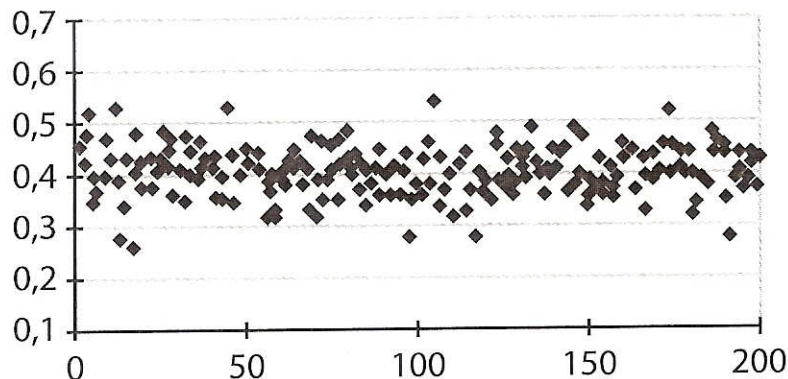
Représenter les points par des points (et non par des croix).

## V. (4 points) QCM

Pour chaque question, 3 réponses sont proposées. Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

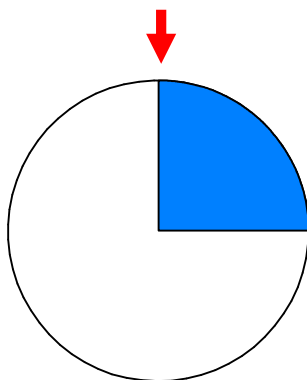
Compléter le tableau donné sur la dernière page du sujet (ne pas entourer les réponses). Chaque réponse juste rapporte un point ; chaque réponse fausse enlève un point. L'absence de réponse n'enlève n'y n'ajoute aucun point.

1°) Le graphique ci-dessous représente des fréquences expérimentales obtenues sur 200 échantillons aléatoires d'une même expérience. On désigne par  $I$  l'intervalle  $[0,3 ; 0,5]$ .



- a. 5 % des fréquences sont en dehors de  $I$ .
- b. 10 % des fréquences sont en dehors de  $I$ .
- c. 95 % des fréquences appartiennent à  $I$ .

2°) On lance 100 fois la roue de loterie ci-dessous où le secteur gagnant est le bleu.



L'intervalle de fluctuation (voir annexe) des fréquences de gain au seuil de 95 % est :

- a.  $[0,15 ; 0,35]$
- b.  $[0,24 ; 0,26]$
- c.  $[14,9 ; 15,1]$

3°) On tire au hasard  $n$  fois, avec remise, une boule dans une urne contenant 30 % de boules rouges. Si l'intervalle de fluctuation de la fréquence de boules rouges, au seuil de 95 %, est  $[0,29 ; 0,31]$ , le nombre  $n$  de tirages effectués était égal à :

- a. 1 000
- b. 10 000
- c. 100

4°) On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie et à noter le côté de la face supérieure. On suppose que la probabilité d'obtenir pile en un lancer est égale à  $p$  (avec  $0,2 \leq p \leq 0,8$ ).

On note  $I_1$  et  $I_2$  les intervalles de fluctuation de la fréquence de pile pour des échantillons aléatoires respectivement de taille 100 et 200 au seuil de 95 %.

- a. La longueur de  $I_1$  est inférieure à celle de  $I_2$ .
- b. La longueur de  $I_1$  est supérieure à celle de  $I_2$ .
- c. La longueur de  $I_1$  est égale à celle de  $I_2$ .

**VI. (1 point)** On considère le jeu suivant :

Lydie lance 4 fois un dé cubique équilibré. Si le trois apparaît au moins une fois au cours des 4 lancers, Lydie est déclarée gagnante, sinon (c'est-à-dire si aucun 3 n'apparaît au cours des 4 lancers), Lydie est déclarée perdante.

Compléter à l'aide des mots « perd » et « gagne » l'algorithme ci-dessous qui permet de simuler ce jeu. On précise que les variables  $p$ ,  $i$ ,  $k$  sont des entiers.

**Initialisation :**

$p$  prend la valeur 1

**Traitement :**

**Pour**  $i$  allant de 1 à 4 **Faire**

$k$  prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 à 6 (compris au sens large)

$p$  prend la valeur  $p \times (k - 3)$

**FinPour**

**Sortie :**

**Si**  $p = 0$ , alors afficher (« Lydie ..... »)

**Sinon** afficher (« Lydie ..... »)

**FinSi**

**VII. (3 points)** On interroge 22 étudiants sur leur consommation de cigarettes par jour.

Les réponses sont résumées dans le tableau ci-dessous.

<b>Nombre de cigarettes fumées</b>	0	1	5	10	20
<b>Nombre d'étudiants</b>	4	2	5	5	6

Compléter les phrases ci-dessous en indiquant un seul résultat à chaque fois (sans écrire aucun calcul) :

- La médiane du nombre de cigarettes fumées par jour est égale à : .....
- Le premier quartile du nombre de cigarettes fumées par jour est égal à : .....
- Le troisième quartile du nombre de cigarettes fumées par jour est égal à : .....

Prénom : ..... Nom : ..... **Note : ..... / 20**

Le barème est donné sur 40.

<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>	<b>V</b>	<b>VI</b>	<b>VII</b>
9	7	10	6	4	1	3

#### IV. Aide pour la question 1°

##### Définition

Soit  $a$  un nombre réel.

Les multiples entiers de  $a$  sont tous les nombres de la forme  $ka$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

---

#### V. Réponses du QCM

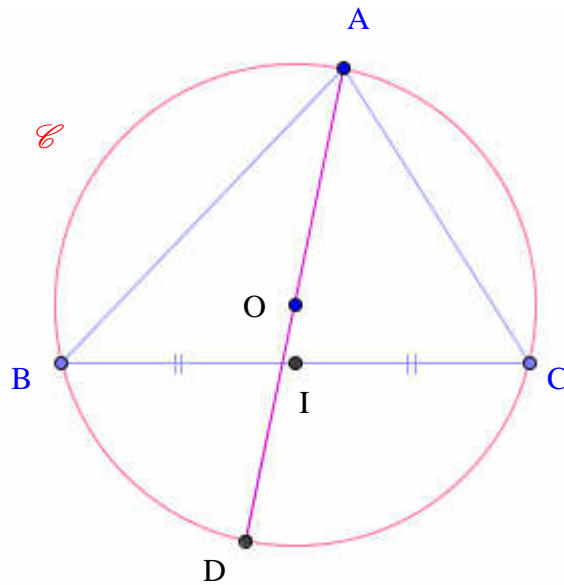
<b>Questions</b>	1°	2°	3°	4°	<b>Total</b>
<b>Réponses</b>					



# Annexe à conserver (à ne pas mettre dans la copie)

---

## II. Figure de l'exercice



## III. Remarque de notation :

La notation  $E = \left\{ M \in P / \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 \right\}$  signifie que  
«  $E$  est l'ensemble de points  $M$  du plan  $P$  tels que  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$  ».

## V. On rappelle la propriété admise et la définition suivantes :

Lorsque l'on prélève un échantillon de taille  $n$  dans une population où la fréquence d'un caractère est  $p$ , alors, sous certaines conditions, la probabilité que cet échantillon fournisse une fréquence  $f$  appartenant

à l'intervalle  $I = \left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  est au moins égale à 0,95.

I est appelé **intervalle de fluctuation de la fréquence  $f$**  au seuil de 95 %.

# Corrigé du contrôle du 18 mars 2011

I.

1°)  $f: x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x}$ . Déterminons  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

2°)  $g: x \mapsto \frac{1 - x^2}{x^2 + x + 2}$ . Déterminons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$g$  est une fonction rationnelle non nulle.

Donc d'après la règle des monômes de plus haut degré,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$ .

3°)  $h: x \mapsto \frac{x-1}{x^2+x}$ . Déterminons  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x)$ .

Attention  $h$  est une fonction rationnelle mais on étudie la limite en un réel donc on ne peut pas appliquer la règle du quotient des monômes de plus haut degré (à cause de la présence de la racine carrée au numérateur).

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x-1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 + x) = 0$$

Tableau de signes du dénominateur

On fait le tableau de signes de  $x^2 + x = x(x+1)$  (on peut éventuellement ajouter deux lignes ou utiliser la règle du signe d'un trinôme puisque  $x^2 + x$  est un trinôme du second degré dont les racines sont  $-1$  et  $0$ ).

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$	
Signe de $x(x+1)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 + x) = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x) = +\infty.$$

## II.

### Hypothèses :

ABC triangle quelconque

$\mathcal{C}$  : cercle circonscrit à ABC

O : le centre de  $\mathcal{C}$

I : milieu de [BC]

D : point de  $\mathcal{C}$  diamétralement opposé à A

1°) Démontrons que l'on a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2$  (1) et  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC^2$  (2).

Le point B appartient au cercle  $\mathcal{C}$  et [AD] est un diamètre de  $\mathcal{C}$  donc le triangle ABD est rectangle en B. Par conséquent, le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) est le point B.

On a donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$ .

Le point C appartient au cercle  $\mathcal{C}$  et [BD] est un diamètre de  $\mathcal{C}$  donc le triangle ACD est rectangle en C. Par conséquent, le projeté orthogonal de D sur la droite (AC) est le point C.

On a donc  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$ .

Attention, on parle du projeté orthogonal d'un point sur une droite et non sur un axe.

### N.B. :

- Le point O n'intervient pas dans la démonstration.
- On peut utiliser la relation de Chasles au lieu de faire la méthode du projeté orthogonal.

2°) Déduisons-en que l'on a :  $AB^2 + AC^2 = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

On utilise les égalités (1) et (2) démontrées dans la question précédente.

$$AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

Or I est le milieu de [BC] donc  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$  (démonstration très facile avec la relation de Chasles).

Par conséquent, on a :  $AB^2 + AC^2 = (2\overrightarrow{AI}) \cdot \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD})$ .

---

## III.

1°)

Pour tout point M du plan P, on a :  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$  et  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$ .

2°)

- E : ensemble des points M du plan P tels que  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$  ;
- F : ensemble des points M du plan P tels que  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$ .

### Recherche de l'ensemble $E$

Soit  $M$  un point quelconque du plan  $P$ .

$$M \in E \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MI}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

L'ensemble  $E$  est la droite passant par  $I$  et perpendiculaire à  $(AB)$ .

### Recherche de l'ensemble $F$

Soit  $M$  un point quelconque du plan  $P$ .

$$M \in F \text{ si et seulement si } (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } (2\overrightarrow{MI}) \cdot (2\overrightarrow{MJ}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } 4(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

L'ensemble  $F$  est le cercle de diamètre  $[IJ]$ .

#### IV. Ensembles de points et algorithmes

1°)

$$E = \{ M(x; y) \in P / x \in [-2; 2], x \text{ multiple entier de } 0,5, y = 2x \}$$

$E$  est l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan  $P$  tels que l'on ait  $x \in [-2; 2]$ ,  $x$  multiple entier de  $0,5$  et  $y = 2x$ .

2°)

<p><b>Initialisation :</b>  <math>x</math> prend la valeur <math>-2</math></p> <p><b>Traitement et sortie :</b>  <b>Pour</b> <math>i</math> allant de <math>1</math> à <math>9</math> (avec un pas de <math>1</math>) <b>Faire</b>              <math>y</math> prend la valeur <math>2x</math>              Placer le point <math>M(x; y)</math>              <math>x</math> prend la valeur <math>x + 0,5</math>  <b>FinPour</b></p>
---

<p><b>Initialisation :</b>  <math>i</math> prend la valeur <math>1</math>  <math>x</math> prend la valeur <math>-2</math></p> <p><b>Traitement et sortie :</b>  <b>Tantque</b> <math>i \leq 9</math> <b>Faire</b>              <math>y</math> prend la valeur <math>2x</math>              Placer le point <math>M(x; y)</math>              <math>x</math> prend la valeur <math>x + 0,5</math>              <math>i</math> prend la valeur <math>i + 1</math>  <b>FinTantque</b></p>
--

3°)  $F = \{ M(x; y) \in P / x \in [-2; 2], x \text{ entier relatif}, y = 2 - x \}$

On place les points  $A(-2; 4)$ ,  $B(-1; 3)$ ,  $C(0; 2)$ ,  $D(1; 1)$ ,  $E(2; 0)$ . Il y a donc 5 points).

#### V. QCM

<b>Questions</b>	1°	2°	3°	4°
<b>Réponses</b>	a et c	a	b	b

**Explications :**

2°) La probabilité de gagner est égale à  $\frac{1}{4} = 0,25$ .

Pour des échantillons de taille 100, l'intervalle de fluctuation des fréquences de gain au seuil de 95 % est donné par

$$I = \left[ 0,25 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,25 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] \text{ soit } [0,15; 0,35].$$

On remarquera que l'on peut appliquer la formule donnée en annexe est applicable car la taille des échantillons étant égale à 100 celle-ci est supérieure ou égale à 25 et la probabilité de gain  $0,25$  est comprise entre  $0,2$  et  $0,8$ .

3°) La longueur de l'intervalle  $[0,29 ; 0,31]$  est égale à  $0,31 - 0,29 = 0,02$ .

La longueur de l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage dont la formule est rappelée en annexe est égale à  $\frac{2}{\sqrt{n}}$ .

On a donc  $\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,02$  donc  $\sqrt{n} = 100$  d'où  $n = 10\ 000$ .

4°) La longueur de  $I_1$  est égale à  $\frac{2}{\sqrt{100}}$ .

La longueur  $I_2$  est égale à  $\frac{2}{\sqrt{200}}$ .

Or  $\sqrt{100} < \sqrt{200}$  d'où  $\frac{1}{\sqrt{100}} > \frac{1}{\sqrt{200}}$ .

Par suite,  $\frac{2}{\sqrt{100}} > \frac{2}{\sqrt{200}}$ .

On en déduit que la longueur de  $I_1$  est supérieure à celle de  $I_2$ .

---

## VI.

### Initialisation :

$p$  prend la valeur 1

### Traitement :

**Pour**  $i$  allant de 1 à 4 **Faire**

$k$  prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 à 6 (compris au sens large)  
     $p$  prend la valeur  $p \times (k - 3)$

**FinPour**

### Sortie :

**Si**  $p = 0$ , alors afficher (« Lydie **gagne** »)

**Sinon** afficher (« Lydie **perd** »)

**FinSi**

## VII.

<b>Nombre de cigarettes fumées</b>	0	1	5	10	20
<b>Nombre d'étudiants</b>	4	2	5	5	6

- La médiane du nombre de cigarettes fumées par jour est égale à : **7,5**.
- Le premier quartile du nombre de cigarettes fumées par jour est égal à : **1**.
- Le troisième quartile du nombre de cigarettes fumées par jour est égal à : **20**.

### Explications :

L'effectif total est égal à 22 ; c'est un nombre pair.

On calcule  $22 = 11 \times 2$ .

La médiane est la moyenne de la 11<sup>e</sup> valeur et la 12<sup>e</sup> valeur.

La 11<sup>e</sup> valeur est égale à 5 ; la 12<sup>e</sup> valeur est égale à 10.

La médiane est donc égale à  $\frac{5+10}{2} = 7,5$ .

Pour déterminer le 1<sup>er</sup> quartile, on calcule  $\frac{22}{4} = 6,5$ .

Le 1<sup>er</sup> quartile est la 7<sup>e</sup> valeur c'est-à-dire 1.

Pour déterminer le 3<sup>e</sup> quartile, on calcule  $\frac{3 \times 22}{4} = 16,5$ .

Le 3<sup>e</sup> quartile est la 17<sup>e</sup> valeur c'est-à-dire 20.