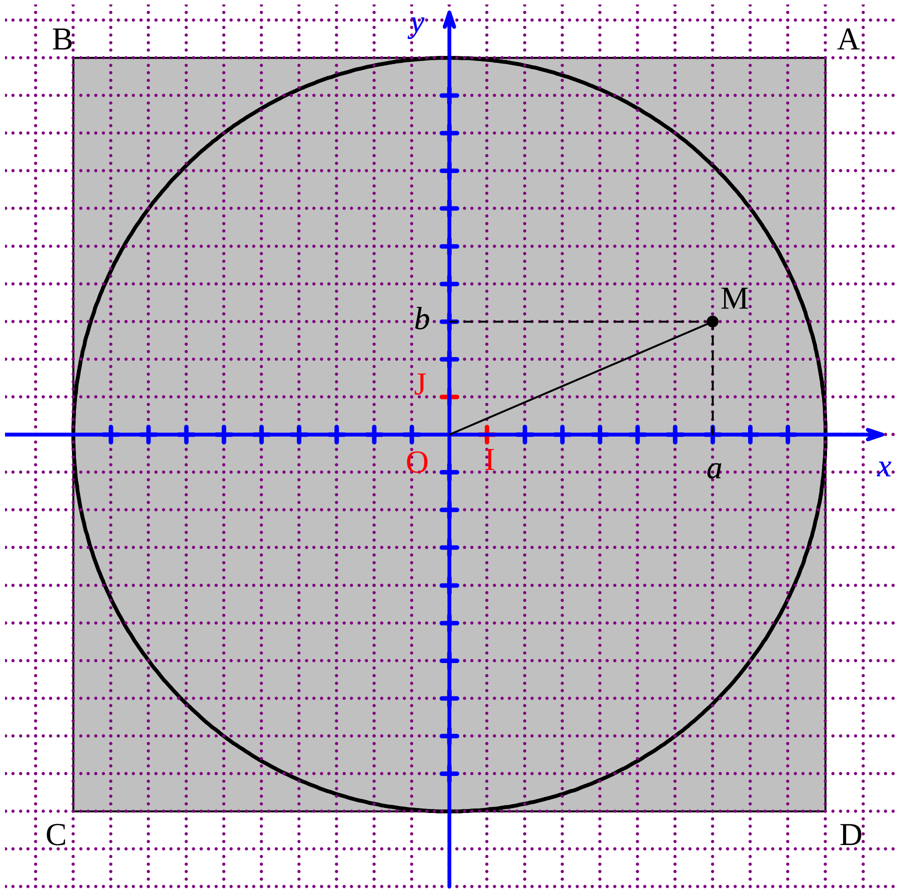
Coloriage d'un disque

Dans ce travail, on va voir comment colorier* un disque et comment compter le nombre de points à coordonnées entières qui appartiennent au disque.

Partie 1 : Analyse d'une figure

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1°) On considère un point M quelconque du plan de coordonnées (a ; b).

• Déterminer OM^2 en fonction de a et b :

$\text{OM}^2 =$ …………………………………………..

• À quelle condition (sur OM^2) a-t-on M sur le cercle de centre O et rayon 10 ?

OM^2 ……..

• À quelle condition (sur a et b) a-t-on M sur le cercle de centre O et rayon 10 ?

…………………………………………………

• À quelle condition (sur a et b) a-t-on M qui appartient au disque fermé** de centre O et rayon 10 ?

…………………………………………………

* Il s'agit plutôt du remplissage d'un disque par des points.

** *fermé* signifie « cercle compris ».

2°) On veut que M décrive tous les points à coordonnées entières à l'intérieur du carré ABCD sur la figure précédente.

a doit varier de …. à …. avec un pas de …..

b doit varier de …. à …. avec un pas de …..

Partie 2 : Algorithme

1°) On propose l'algorithme ci-dessous.

Recopier et compléter cet algorithme.

Variables :
a, *b* (coordonnées de M)
k (compteur de points appartenant au disque)

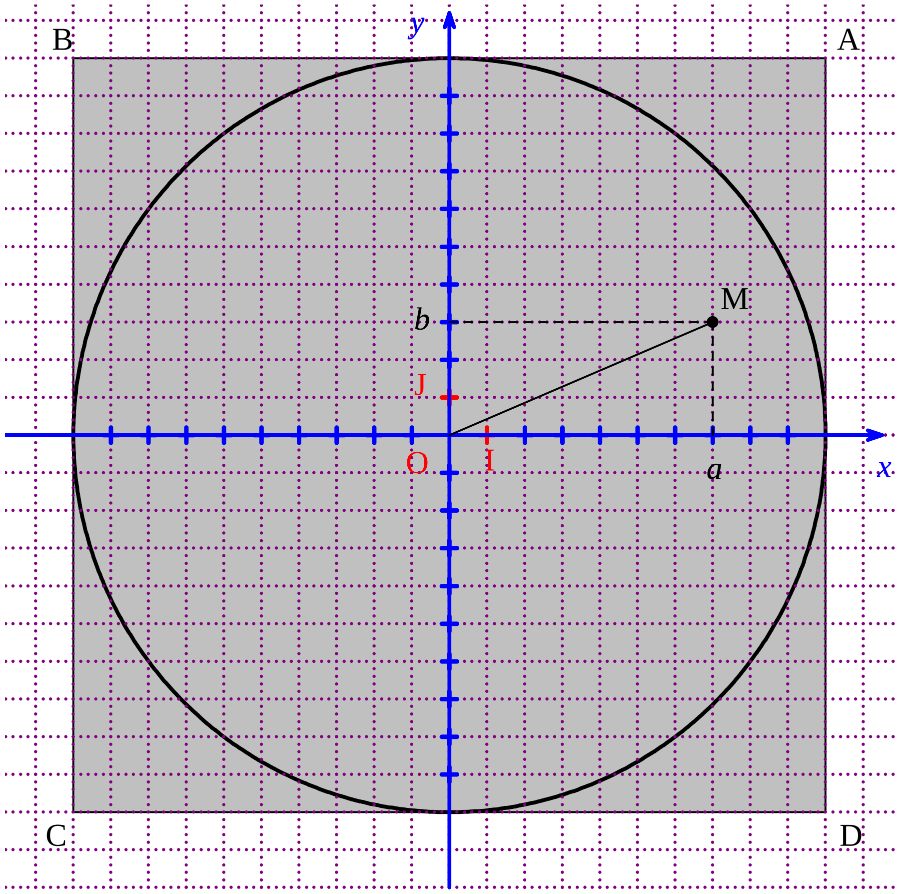
Initialisations :
Tracer le cercle de centre O et de rayon 10
k prend la valeur ……

Traitement et sorties :
Pour *a* variant de …. à …. **Faire**
    Pour *b* variant de …. à …. **Faire**
        Si ……………………….
            Alors marquer le point de coordonnées (…… ; ……)
            k prend la valeur $k+$….
        FinSi
    FinPour
FinPour
Afficher *k*

2°) Programmer cet algorithme sur calculatrice ou sur Algobox (dans ce dernier cas, on pourra utiliser de la couleur pour le cercle et les points).
En déduire le nombre de points appartenant au disque fermé de centre O et de rayon 10.

Corrigé

Partie 1 : Analyse d'une figure



1°) M(a ; b)

• **Déterminer OM^2 en fonction de a et b :**

$OM^2 = \boldsymbol{a^2 + b^2}$ (car on est dans un repère orthonormé)

• **À quelle condition (sur OM^2) a-t-on M sur le cercle de centre O et rayon 10 ?**

OM^2 **= 100**

• **À quelle condition (sur a et b) a-t-on M sur le cercle de centre O et rayon 10 ?**

$a^2 + b^2 = 100$

• **À quelle condition (sur a et b) a-t-on M qui appartient au disque fermé de centre O et rayon 10 ?**

$a^2 + b^2 \leqslant 100$

2°)

a doit varier de **– 10** à **10** avec un pas de **1**.

b doit varier de **– 10** à **10** avec un pas de **1**.

On effectue un remplissage vertical de bas en haut, de la gauche vers la droite.

Partie 2 : Algorithme

1°) **Recopier et compléter l'algorithme.**

Variables :
a, b (coordonnées de M)
k (compteur de points appartenant au disque)

Initialisations :
Tracer le cercle de centre O et de rayon 10
k prend la valeur **0**

Traitement et sorties :
Pour a variant de **– 10** à **10** **Faire**
    Pour b variant de **– 10** à **10** **Faire**
        Si $a^2 + b^2 \leqslant 100$
            Alors marquer le point de coordonnées (a ; b)
            k prend la valeur k + **1**
        FinSi
    FinPour
FinPour
Afficher k

Remarque :

On utilise la condition d'appartenance d'un point au disque fermé avec les carrés car cela sera plus simple lors de la programmation : il n'y aura ainsi pas de calcul de racine carrée (cela économise des calculs pour la machine donc gagne du temps lors de l'exécution).

2°) **Programmer cet algorithme sur calculatrice ou sur Algobox (dans ce dernier cas, on pourra utiliser de la couleur pour le cercle et les points).**

PROGRAMME : COLORIAGE D'UN DISQUE

```
: Cercle (0,0,10)  *
: 0 → K
: For (A, – 10, 10)
: For (B, – 10, 10)
: If  A² + B² ⩽ 100
: Then
: Pt-Aff (A ; B)  *
: K + 1 → K
: End
: End
: End
: Disp K
```

* On utilise l'option dessin de la calculatrice (si la calculatrice est en anglais, il s'agit de Point-On).

Astuce donnée par Thomas Delamarre TS1 le 17-10-2013

Pour avoir un vrai cercle sur calculatrice, prendre la fenêtre graphique :
$\text{Xmin} = -15$
$\text{Xmax} = 15$
$\text{Ymin} = -10$
$\text{Ymax} = 10$

Louis Charles a modifié le programme : on voit tout le cercle se remplir verticalement de bas en haut.

On peut tracer un cercle sur l'écran d'une calculatrice graphique en utilisant d'autres moyens ;

- deux fonctions (ici : $x \mapsto \sqrt{100-x^2}$ et $x \mapsto -\sqrt{100-x^2}$)

- une représentation paramétrique d'un cercle ; ici $\begin{cases} x = 10\cos t \\ y = 10\sin t \end{cases}$.

Attention, dans le programme sur calculatrice TI, penser à mettre Then après le If car il y a deux instructions après le If (sinon le programme n'effectue que la première instruction).

Pour le cercle et les points, on utilise l'option dessin de la calculatrice.

Réponse au problème :

En faisant tourner le programme, on obtient **317 points** à coordonnées entières.
Le nombre paraît énorme. C'est pourtant vrai.

On peut le vérifier en comptant les points sur la figure : nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur du carré ABCD – nombre de points à coordonnées entières n'appartenant pas au disque.

Il y a $21\times 21=441$ points appartenant à coordonnées entières appartenant au carré.
$441-4\times 31=317$

Pour un cercle de centre O et de rayon 5, on obtient 81 points.

Question pour aller plus loin :

Soit *a* un réel strictement positif quelconque.
Déterminer le nombre d'entiers relatifs appartenant à l'intervalle [– *a* ; *a*].

Application :

Déterminer une expression du nombre de points du disque de centre O et de rayon 10 sous la forme d'une somme en utilisant la partie entière.
En déduire le résultat à l'aide de la calculatrice.

Le nombre d'entiers relatifs dans l'intervalle [– *a* ; *a*] est E(*a*) + 1.

Réponse :

Le nombre de points du disque de centre O et de rayon 10 est égal à : $N=\sum_{k=-10}^{k=10}\left[2\mathrm{E}\left(\sqrt{100-k^2}\right)+1\right]$.

$N=2\times 148+21=317$