TS3

Contrôle du vendredi 11 février 2011 (4 h)

- **Au début de la copie, aménager un cartouche de présentation avec le numéro des exercices de I à VI permettant d'indiquer le nombre de points pour chaque exercice.**
- **Rédiger très lisiblement et sans rature, en écrivant au stylo à plume. Ne pas utiliser d'abréviations.**
- **Mettre les résultats demandés bien en évidence en les encadrant en rouge à la règle.**
- **Tous les traits de fraction doivent être tirés à la règle.**
- **Rendre l'énoncé dans la copie avec le nom.**

I. (13 points) Cet exercice comporte huit questions indépendantes. On ne demande aucune justification ; on se contentera de compléter le tableau donné ci-contre à la fin de l'exercice.
Pour les probabilités demandées, donner les résultats (valeurs exactes) sous forme décimale (FD) ou fractionnaire irréductible (FF) selon l'indication de l'énoncé.
Ne pas arrondir les résultats sous forme décimale.
Ne mettre <u>qu'un seul résultat</u> à chaque fois.

Question 1

Dans une coopérative de vente par correspondance, chaque sociétaire est muni d'un indicatif. De plus, pour commander par Internet, il doit posséder un code secret personnel.
a) L'indicatif d'un sociétaire est formé d'un numéro de six chiffres suivis d'une lettre, répondant aux conditions suivantes :
✶ Il peut y avoir répétition des chiffres.
✶ Le premier chiffre à gauche ne peut être zéro.
✶ La lettre ne peut être O.
Il y a autant d'indicatifs que de sociétaires. Combien peut-il y avoir de sociétaires ?
b) Le code secret est composé de quatre lettres prises parmi les vingt-six de l'alphabet (donc O est, cette fois, utilisable), avec répétition possible.
Est-il possible que tout sociétaire possède un code secret ? Répondre par oui ou non, sans justifier la réponse.

Question 2

On veut choisir une délégation de quatre personnes prises parmi quinze hommes et quatorze femmes.
Déterminer le nombre de délégations respectant la parité hommes-femmes.

Question 3

Jean est abonné à la télévision câblée, il regarde deux chaînes de cinéma, la chaîne A et la chaîne B.
Dans 70 % des cas, il regarde la chaîne A sur laquelle il y a 40 % de films policiers, le reste du temps il regarde la chaîne B sur laquelle il y a 60 % de films policiers.
a) Quelle est la probabilité que Jean regarde un film policier ? (FD)
b) Sachant que Jean a vu ce soir un film policier, quelle est la probabilité qu'il a regardé la chaîne B qui est celle où il y a le plus de films policiers ? (FF)

Question 4

L'urne U_1 contient deux boules vertes et trois boules rouges.
L'urne U_2 contient deux boules rouges et trois boules vertes.
On tire une première boule de l'urne U_1 :
- Si elle est rouge, on la remet dans cette urne, et on retire une autre boule de U_1.
- Si elle est verte, on tire une boule de l'urne U_2.

Quelle est la probabilité d'un tirage monocolore ? (FD) On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

Question 5

Quatre personnes choisissent un nombre entre 1 et 10.
Calculer la probabilité pour que deux personnes au moins choisissent le même nombre. (FD)

Question 6

Une urne contient trois boules : une boule bleue, une boule rouge et une boule jaune.
On tire une boule au hasard. On ne la remet pas dans l'urne.
On tire une deuxième boule au hasard dans l'urne. On la remet dans l'urne.
On tire une troisième boule dans l'urne.
On note les boules dans l'ordre d'apparition.
On note *P* la loi d'équiprobabilité sur l'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire.
On note E l'événement « La première boule est bleue » et F l'événement « Le tirage contient deux boules de la même couleur ».
Les événements E et F sont-ils indépendants pour la probabilité *P* ?
On pourra s'aider d'un arbre de possibilités.

Question 7

a) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « SOLEIL ».
b) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « SOLEIL » qui commencent par une voyelle.
c) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « SOLEIL » qui commencent par une consonne.

Question 8

On distribue au hasard à une personne deux cartes choisies parmi les quatre suivantes : le valet de pique, le valet de cœur, la dame de cœur, le roi de carreau.
a) La personne annonce qu'elle a un valet. Quelle est la probabilité qu'elle ait les deux valets ? (FF)
b) La personne annonce qu'elle a le valet de pique. Quelle est la probabilité qu'elle ait les deux valets ? (FF)

Q_1		Q_2	Q_3		Q_4
a)	**b)**		**a)**	**b)**	

Q_5	Q_6	Q_7			Q_8	
		a)	**b)**	**c)**	**a)**	**b)**

II. (5 points) Une urne contient des boules noires et des boules blanches. Le nombre de boules blanches est égal au nombre de boules noires. On prélève successivement au hasard *n* boules avec remise (*n* entier supérieur ou égal à 2).

1°) On définit les événements suivants :
A : « toutes les boules sont de la même couleur » ;
B : « on obtient exactement une boule blanche » ;
C : « on obtient des boules des deux couleurs » ;
D : « on obtient au plus (c'est-à-dire au maximum) une boule blanche ».

On donne ci-dessous dans le désordre la probabilité des événements A, B, C, D.

$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{n}{2^n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{n+1}{2^n}$

Associer à chaque événement, sans justifier, sa probabilité.

2°) *Dans cette question, toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte.*
Donner, en justifiant, une valeur de *n* telle que les événements C et D soient indépendants.

III. (8 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ (E).

1°) Vérifier que la fonction *u* définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

Présenter les calculs convenablement en faisant très attention à la rigueur.
2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

3°) Soit *v* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que *v* est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ solution de (E_0).
En déduire les solutions de (E).

Partie B
Pour tout réel *k*, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=(x+k)\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Démontrer que la fonction f_k admet un maximum global sur $\mathbb{R}$. Préciser en quel réel ce maximum est atteint.
b) Déterminer *k* tel que ce maximum soit égal à 5.
2°) (Dans cette question, *k* est un réel quelconque).
Soit M_k le point de $\mathcal{C}_k$ qui correspond au maximum de f_k.
Démontrer que M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y=\mathrm{e}^{-x}$.
3°) *Dans cette question toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte.*
Soit T_k la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0.
Démontrer que, lorsque *k* varie, la droite T_k passe par un point fixe A, que l'on précisera.

IV. (5 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0>0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{u_n}{\mathrm{e}^{u_n}+1}$ pour tout entier naturel *n*. On ne cherchera pas à expliciter u_n en fonction de *n*.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n>0$.
On commencera par définir une phrase *P*(*n*).
2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Détailler toute la démarche.
3°) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge. Citer la propriété utilisée.
On ne demande pas de déterminer la limite de (u_n) dans cette question.

4°) On note *l* la limite de (u_n). Démontrer avec soin que *l* vérifie l'égalité $l=\frac{l}{\mathrm{e}^l+1}$. En déduire la valeur de *l*.

V. (3 points) On considère l'équation $z^2-2\bar{z}+1=0$ (E) où $z\in\mathbb{C}$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où *x* et *y* sont deux réels.
1°) Démontrer que (E) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2=(x-1)^2 \\ y(x+1)=0 \end{cases}$.
2°) Donner sans justifier toutes les solutions de (E) sous forme algébrique (faire les calculs au brouillon).
On rédigera ainsi : « Les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ sont ….. .»

VI. (6 points)
1°) On considère l'équation $z^2-6z+12=0$ (E).
Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
Rédiger complètement et soigneusement cette question.
On donnera les solutions sous forme simplifiée, sans dénominateur (attention à ne pas faire de faute car cette question conditionne en partie la suite de l'exercice).
On note *u* et *v* ses solutions, *u* étant celle dont la partie imaginaire est positive.

2°) Calculer le quotient $R=\frac{u}{u-4}$; donner le résultat, sans détailler les calculs, sous forme algébrique.

En déduire sans calcul, mais en détaillant le raisonnement, l'écriture algébrique du nombre complexe $S=\frac{v}{v-4}$.

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$, on note U et V les points d'affixes respectives *u* et *v*.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe *z* tels que $z\bar{z}-2(z+\bar{z})=0$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points M du plan d'affixe *z* tels que $z\bar{z}-4(z+\bar{z})+12=0$.
a) Démontrer par le calcul que U et V appartiennent aux ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
b) Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des cercles dont on précisera le rayon et les centres respectifs A et B.
On rédigera selon le modèle suivant :
« Soit M un point quelconque du plan complexe, d'affixe *z*.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où *x* et *y* sont deux réels.
M $\in\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ …….
$\Leftrightarrow$ …….
$\Leftrightarrow$ ……. »

c) Faire une figure en prenant un gros carreau pour unité graphique. Tracer le repère.
Construire les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ainsi que les points U et V.

Quelques « modèles » de rédaction pour les fonctions

1. « La fonction f est dérivable sur …. comme …. . »

2. « Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par …. . »

3. « Pour tout $x \in \ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$ » (on peut utiliser le quantificateur $\forall$).

4. « La fonction f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ en x = ….. ».

Quelques remarques sur les notations

1. On prendra garde à bien noter les suites avec des parenthèses comme dans la phrase :
« La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ ».

2. Pour les limites de sommes ou de produits, il faut utiliser des parenthèses comme dans l'exemple :
« $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^2 - 2x\right) = +\infty$ ».

3. Avant les calculs, ne pas oublier de préciser le domaine de validité. On pourra utiliser le quantificateur $\forall$ à bon escient bien évidemment, comme dans l'exemple : « $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$ »

Quelques « modèles » de rédaction pour la récurrence

1. Pour tout entier naturel n, on définit la phrase $P(n)$: « …… ».

2. Ne pas utiliser de quantificateur ni d'équivalences dans une récurrence.

Ne pas utiliser d'abréviation dans la rédaction

Corrigé du contrôle du 11 février 2011

I. Dénombrement et probabilités

Question 1

a) On utilise la méthode des cases.

Le premier chiffre est différent de 0, ce qui nous donne 9 possibilités (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9).
Les 5 chiffres suivants ont chacun 10 possibilités, et enfin, pour la dernière lettre, celle-ci devant être différente de O, on a 25 possibilités.
Ce qui nous donne : $N = 9\times10^5\times25 = 22\ 500\ 000$ sociétaires.

b) Le code est composé de 4 lettres prises parmi les 26 de l'alphabet.
Ceci nous donne un total de nombres secrets différents égal à : $26^4 = 456\ 976$ codes.
Conclusion :
Comme 456 976 < 22 500 000, alors tous les sociétaires ne peuvent pas posséder un code secret unique.

Question 2

Tirage simultané de 2 hommes parmi 1es 15 :
Il y a : $\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\times13!} = \frac{15\times14}{2} = 105$ possibilités.

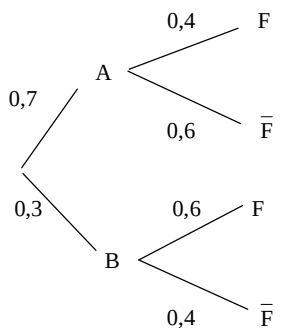
Tirage simultané de 2 femmes parmi 1es 14 :
Il y a : $\binom{14}{2} = \frac{14!}{2!\times12!} = \frac{13\times14}{2} = 91$ possibilités.

Il y a donc 91 × 105 = 9 555 délégations possibles respectant la parité hommes-femmes.

Question 3

A : « Jean regarde la chaîne A »
B : « Jean regarde la chaîne B »
F : « Jean regarde un film policier »

a) On effectue un arbre dans lequel on met les probabilités sous forme décimale.



On applique la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} P(F) &= 0,7\times0,4 + 0,3\times0,6 \\ &= 0,28 + 0,18 \\ &= 0,46 \end{aligned}$$

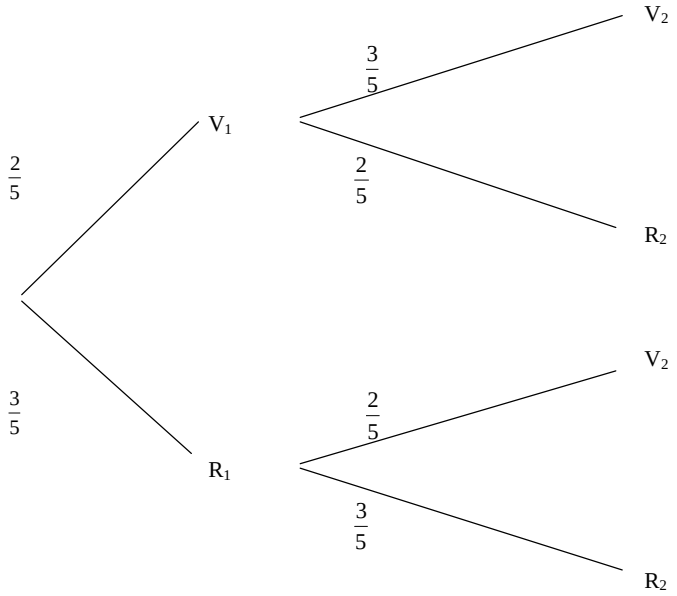
2°) $P(B/F) = \frac{P(B\cap F)}{P(F)} = \frac{0,3\times0,6}{0,46} = \frac{0,18}{0,46} = \frac{18}{46} = \frac{9}{23}$

Question 4

On définit les événements suivants :

- V_1 : « la boule tirée au premier tirage est verte »
- R_1 : « la boule tirée au premier tirage est rouge »
- V_2 : « la boule tirée au deuxième tirage est verte »
- R_2 : « la boule tirée au deuxième tirage est rouge »

On adopte le modèle d'équiprobabilité.



On note M l'événement « obtenir un tirage bicolore ».

$$P(\mathrm{M}) = P(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2) + P(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2)$$
$$= \frac{6}{25} + \frac{9}{25}$$
$$= \frac{15}{25}$$
$$= \frac{3}{5}$$
$$= 0{,}6$$

Question 5

On note V l'événement « au moins deux personnes ont choisi le même nombre ».

On va considérer l'événement contraire $\overline{\mathrm{V}}$: « toutes les personnes ont choisi des nombres différents ».

$$P(\overline{\mathrm{V}}) = \frac{10\times9\times8\times7}{10^4} = \frac{9\times8\times7}{10^3} = 0{,}504$$

$$P(\mathrm{V}) = 1 - P(\overline{\mathrm{V}}) = 1 - 0{,}504 = 0{,}496$$

Question 7

a) Le nombre d'anagrammes du mot « SOLEIL » est égal à : $\frac{6!}{2!}$ (car il y a 6 lettres dont deux sont identiques).

$$\frac{6!}{2!} = \frac{2\times3\times4\times5\times6}{2} = 3\times4\times5\times6 = 360$$

b) Le nombre d'anagrammes du mot « SOLEIL » qui commencent par une voyelle est égal à

$$3\times\frac{5!}{2} = 3\times3\times4\times5 = 180$$

c) Le nombre d'anagrammes du mot « SOLEIL » qui commencent par une consonne est égal à
360 – 180 = 180 (différence entre les deux résultats précédents).

Question 8

Le nombre de résultats total pour l'expérience aléatoire est égal à $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\times2!} = \frac{3\times4}{2} = 6$.

a) Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle.
On définit deux événements :

A : « avoir au moins un valet » ;
B : « avoir les deux valets »

On cherche $P(\mathrm{B/A})$.

$$P(\mathrm{B/A}) = \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

car B ⊂ A (si on a les deux valets, alors on a au moins un valet) d'où A ∩ B = B

$$P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(\mathrm{B}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$P(\mathrm{B/A}) = \frac{P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$$

b) Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle.

C : « avoir le valet de pique » ;
B : « avoir les deux valets »

On cherche $P(\mathrm{B/C})$.

$$P(\mathrm{C}) = \frac{\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6}$$

$$P(\mathrm{B/C}) = \frac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})}{P(\mathrm{C})} = \frac{P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{C})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Q_1		Q_2	Q_3		Q_4
a)	**b)**		**a)**	**b)**	
22 500 000	non	9 555	0,46	$\frac{9}{23}$	0,6

Q_5	Q_6	Q_7			Q_8	
		a)	**b)**	**c)**	**a)**	**b)**
0,496	oui	360	180	180	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$

II. Le nombre de tirages est égal à 2^n. On utilise la méthode des cases.

2	2	2	2	2	…			2	2

On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.

1°) $P(\mathrm{A})=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$; $P(\mathrm{B})=\frac{n}{2^n}$; $P(\mathrm{C})=P(\overline{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})=1-\frac{1}{2^{n-1}}$; $P(\mathrm{D})=\frac{n+1}{2^n}$.

Détail des calculs :

Pour l'événement A, il y a deux résultats possibles : soit on obtient que des boules noires, soit on obtient que des boules blanches.

Pour l'événement B, il y a *n* résultats possibles ; cela dépend de la place de la boule blanche.

L'événement C est le contraire de l'événement A.

L'événement D est la réunion de l'événement B et de l'événement « obtenir aucune boule blanche ».
Ces deux événements sont incompatibles.

2°) Dire que les événements C et D sont indépendants signifie que $P(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})=P(\mathrm{C})\times P(\mathrm{D})$.

C : « on obtient des boules des deux couleurs »
D : « on obtient au plus une boule blanche »

L'intersection des événements C et D est donc l'événement « on obtient une seule boule blanche » (il suffit de réfléchir un peu pour le voir). C'est donc l'événement B.

Pour $n = 3$, $P(\mathrm{C})=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$, $P(\mathrm{D})=1-\frac{1}{2^{3-1}}=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$, $P(\mathrm{B})=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$

On peut dire que pour $n = 3$ l'égalité $P(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})=P(\mathrm{C})\times P(\mathrm{D})$ est vérifiée.

Donc pour $n = 3$, les événements C et D sont indépendants.

N.B. : On pourrait démontrer que 3 est la seule valeur de *n* pour laquelle les événements C et D sont indépendants. Mais cela n'était pas demandé dans l'énoncé.

III. Cet exercice nécessite un très grand soin dans la rédaction et dans l'utilisation des notations (quantificateurs en particulier).

Partie A

1°) Vérifions que la fonction *u* définie par $u(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

La fonction *u* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)=1\mathrm{e}^{-x}+x\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)+u(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$

Donc la fonction *u* est une solution particulière de (E).

2°) Résolvons l'équation différentielle homogène associée (E_0).

L'équation homogène associée (E_0) s'écrit : $y'+y=0$ soit $y'=-y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-1$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-x}\quad(k\in\mathbb{R})$.

3°) Soit *v* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que *v* est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ solution de (E_0).
Déduisons-en les solutions de (E).

$$\begin{aligned}
v-u \text{ est solution de } (E_0) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad (v-u)'(x)+(v-u)(x)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)-u'(x)+v(x)-u(x)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)+v(x)=u'(x)+u(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)+v(x)=x\mathrm{e}^{-x}\\
&\Leftrightarrow v \text{ est solution de (E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow v-u \text{ est solution de } (E_0)\\
&\Leftrightarrow v-u \text{ est définie par } (v-u)(x)=k\mathrm{e}^{-x}\quad(k\in\mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)-u(x)=k\mathrm{e}^{-x}\quad(k\in\mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{-x}\quad(k\in\mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)=x\mathrm{e}^{-x}+k\mathrm{e}^{-x}\quad(k\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions *v* définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=x\mathrm{e}^{-x}+k\mathrm{e}^{-x}\quad(k\in\mathbb{R})$.

Partie B

$f_k(x)=(x+k)\mathrm{e}^{-x}$

1°) a) Démontrons que la fonction f_k admet un maximum global sur $\mathbb{R}$.

La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est obtenue à partir de la somme, du produit et de la composée de fonctions qui le sont.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k'(x) = 1\mathrm{e}^{-x} + (x+k)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}(1-k-x)$

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
Signe de e^{-x}		+		+	
Signe de $1-k-x$		+	0	–	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de f		↗	$f(1-k)$	↘	

D'après le tableau de variation, la fonction f_k admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ atteint pour $x = 1 - k$.

La valeur de ce maximum est égale à $f(1-k) = \mathrm{e}^{k-1}$.

b) Déterminons k tel que ce maximum soit égal à 5.
On cherche k tel que $\mathrm{e}^{k-1} = 5$ (1).

(1) $\Leftrightarrow k - 1 = \ln 5$
$\Leftrightarrow k = \ln 5 + 1$

Le maximum de la fonction f_k est égal à 5 pour $k = \ln 5 + 1$.

2°) M_k est le point de $\mathcal{C}_k$ qui correspond au maximum de f_k donc ses coordonnées sont $\left(1-k\,;\mathrm{e}^{k-1}\right)$.
On a donc $y_{\mathrm{M}_k} = \mathrm{e}^{-x_{\mathrm{M}_k}}$.
On en déduit que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.

3°) T_k a pour équation $y = f'_k(0)(x-0) + f_k(0)$.
Or $f_k(0) = k$ et $f'_k(0) = 1-k$;
T_k a donc pour équation $y = (1-k)x + k$.

On constate aisément que $(1-k)1 + k = 1 \cancel{-k} + \cancel{k} = 1$

Donc, lorsque k varie, la droite T_k passe par le point A(1 ; 1) (qui est un point fixe, car ses coordonnées ne dépendent pas de k).

IV.

1°) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 > 0$ par hypothèse donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 0$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$.

On a : $u_k > 0$.
De plus, on a : $\mathrm{e}^{u_k} > 0$ d'où $\mathrm{e}^{u_k} + 1 > 1$.
Or $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{\mathrm{e}^{u_k}+1}$.
Donc $u_{k+1} > 0$.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2°) Méthode pour étudier le sens de variation de la suite : on étudie le signe de la différence.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\mathrm{e}^{u_n}+1} - u_n = -\dfrac{u_n \mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n}+1}$

On étudie le signe de chacun des facteurs.

D'après la question 1°) on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°) D'après la question 1°), la suite (u_n) est minorée par 0.
D'après la question 2°), la suite (u_n) est strictement décroissante.
Or toute suite décroissante et minorée converge.
Donc la suite (u_n) converge.

Attention, on ne peut pas dire à ce stade-là qu'elle converge vers 0.
C'est le but de la question 4°) de trouver la limite de la suite (u_n).
4°) On sait que l est la limite de la suite (u_n).

A partir de là, on va exprimer de deux manières différentes la limite de u_{n+1} ce qui va nous permettre de trouver une égalité vérifiée par l.

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ de manière évidente (car la suite (u_n) converge vers l donc la suite (u_{n+1}) converge vers la même limite puisqu'elle a les mêmes termes mais décalée de 1).

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{\mathrm{e}^{u_n}+1}\right) = \dfrac{l}{\mathrm{e}^{l}+1}$ (car la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$)

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \begin{cases} l \\ \dfrac{l}{e^l+1} \end{cases}$$

Par unicité de la limite d'une suite, on a : $l = \dfrac{l}{e^l+1}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow$ $le^l + l = l$

$\Leftrightarrow$ $le^l = 0$

$\Leftrightarrow$ $l = 0$ (car $e^l > 0$)

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

(u_n) converge vers 0.

Question supplémentaire qui n'a pas été retenue lors de la rédaction définitive :

Que peut-on dire de la suite (u_n) lorsque $u_0 < 0$?
Donner les grandes lignes de la démarche sans détailler toutes les étapes.

V. $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ (E)

$z = x + iy$ avec x et y réels.

1°) Démontrons que (E) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2 = (x-1)^2 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$.

(E) $\Leftrightarrow$ $(x+iy)^2 - 2(x-iy) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + 2ixy - y^2 - 2x + 2iy + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - y^2 - 2x + 1 + 2ixy + 2iy = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - y^2 - 2x + 1 + 2i(xy + y) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2 = (x-1)^2 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$

2°) Donnons toutes les solutions de (E).

Les solutions de (E) sont 1, – 1 + 2i, – 1 – 2 i.

V.

1°) $z^2 - 6z + 12 = 0$ (E)

Résolvons l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels.

Recensement des coefficients :

$a = 1$; $b = -6$; $c = 12$

$b' = \dfrac{b}{2} = -3$

Calcul du discriminant réduit

$\Delta' = b'^2 - ac$

$= 9 - 12$

$= -3$

On a : $\Delta < 0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b' - i\sqrt{-\Delta'}}{a}$

$z_1 = 3 - i\sqrt{3}$

$z_2 = \dfrac{-b' + i\sqrt{-\Delta'}}{a}$

$z_2 = 3 + i\sqrt{3}$

$u = 3 + i\sqrt{3}$; $v = 3 - i\sqrt{3}$

On a : $v = \bar{u}$.

Mauvaise méthode : poser $z = x + iy$ avec x et y réels.

2°) $R = \dfrac{u}{u-4} = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}-4} = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(3+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})} = \dfrac{-4i\sqrt{3}}{4} = -i\sqrt{3}$

$S = \dfrac{v}{v-4} = \dfrac{\bar{u}}{\bar{u}-4} = \dfrac{\bar{u}}{\overline{u-4}} = \overline{\left(\dfrac{u}{u-4}\right)} = \bar{R} = i\sqrt{3}$.

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on note U et V les points d'affixes respectives u et v.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) = 0$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $z\bar{z} - 4(z + \bar{z}) + 12 = 0$.

a) Démontrons par le calcul que U et V appartiennent aux ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

$$\begin{aligned} z_U\,\overline{z_U} - 2\left(z_U + \overline{z_U}\right) &= u\,\overline{u} - 2\left(u + \overline{u}\right) \\ &= \left(3 + i\sqrt{3}\right)\left(3 - i\sqrt{3}\right) - 2\times 6 \\ &= 12 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc U $\in \mathcal{C}$.

Les autres vérifications se font de la même façon.

b) Démontrons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des cercles.

Soit M un point quelconque du plan complexe, d'affixe z.

On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

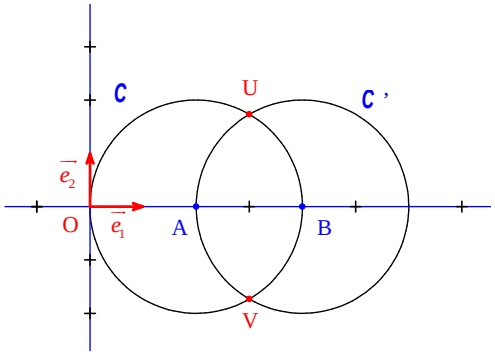
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow z\,\overline{z} - 2\left(z + \overline{z}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + iy)(x - iy) - 2(x + iy + x - iy) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\times 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A d'affixe 2 et de rayon 2.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}' &\Leftrightarrow z\,\overline{z} - 4\left(z + \overline{z}\right) + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + iy)(x - iy) - 4(x + iy + x - iy) + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2 - 16 + y^2 + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre B d'affixe 4 et de rayon 2.

c) Figure.



Barème

Tout est noté assez large.

I. (13 points)

1 point par réponse

II. (5 points)

1°) 4

2°) 1

III. (8 points)

Partie A

1°) 1
2°) 1
3°) 1 + 1

Partie B

1°) a) 1
b) 1
2°) 1
3°) 1

IV. (5 points)

1°) 1
2°) 1
3°) 1
4°) 1 + 1

V. (3 points)
1°) 2
2°) 1

VI. (6 points)

1°) 1
2°) 1 + 1
3°) a) 1
b) 1
c) 1