1$^{\text{ère}}$ L Option

Contrôle du vendredi 7 mai 2010
(2 heures)

<u>**Consignes à respecter impérativement**</u>

- **Rédiger à l'encre, sans rature.**
- **Encadrer tous les résultats en rouge <u>à la règle</u> au fur et à mesure.**

I. (3 points) Trois personnes, Aline, Bernard et Claude ont chacune un sac contenant des billes. Chacune tire au hasard une bille de son sac.

1°) Le contenu des sacs est donné ci-dessous.

Sac d'Aline :	Sac de Bernard :	Sac de Claude :
25 billes rouges et 72 billes noires	10 billes rouges et 30 billes noires	40 billes rouges et 119 billes noires

Laquelle de ces personnes a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge ? Justifier à l'aide de calculs.

2°) On souhaite qu'Aline ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge.
Avant le tirage, combien de billes noires faut-il ajouter pour cela dans le sac d'Aline ?

3°) **Question beaucoup plus difficile**
Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le résultat de la première question reste-t-il valable si l'on ajoute à chaque personne un même nombre de billes rouges ?

II. (1 point) Dans une boîte, on sait qu'il n'y a que des billes rouges, vertes ou jaunes. On tire une boule de la boîte et on note sa couleur : on ne connaît pas la loi de probabilité, mais on a réalisé l'expérience un grand nombre de fois. On a obtenu les résultats suivants :

	Nombre d'expériences réalisées			
	100	**2 000**	**5 000**	**10 000**
Rouge	38	611	1 424	3 705
Vert	27	295	702	1 258
Jaune	35	1 094	2 874	5 037

On propose trois lois de probabilité ; on admet qu'un et un seul de ces modèles est compatible avec l'expérience aléatoire. Donner cette loi et argumenter pour la non validité des deux autres.

a) **Première loi :** les trois couleurs ont la même probabilité d'apparaître.

b) **Deuxième loi :** la probabilité du résultat « rouge » est deux fois celle du résultat « vert », et celle du « jaune » le double de celle du résultat « vert ».

c) **Troisième loi :** les probabilités des résultats « rouge », « vert », « jaune » sont dans les proportions 3 ; l ; 4.

III. (3 points) Une urne contient trois boules : une boule blanche et deux boules noires. On tire une boule.
Si elle est blanche, on la remet dans l'urne, si elle est noire, on ne la remet pas. On effectue un deuxième tirage.

1°) Représenter cette situation par un arbre (faire les branches à la règle). On numérotera les boules noires.
2°) Déterminer la probabilité des événements suivants (sous forme fractionnaire).
E : « obtenir deux boules de couleurs différentes ».
F : « obtenir deux boules la même couleur ».

IV. (7 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

1°) Calculer $f'(x)$ (sans expliquer).

2°) Faire un tableau comprenant le signe de la dérivée et les variations de f (faire les flèches à la règle).
Calculer la valeur de l'extremum et reporter la valeur dans le tableau précédent.
Contrôler les variations en traçant la représentation graphique de f sur la calculatrice graphique.

3°) a) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = 3 - (x-1)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ par le calcul l'inéquation $f(x) > 0$.

4°) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.
Déterminer l'équation réduite de la tangente D à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 3.

V. (2 points) Ecrire la division euclidienne de 2010 par 17.
Recopier et compléter en rouge la phrase :
« Le reste de la division euclidienne de 2010 par 17 est égal à ………… ».
« Le quotient de la division euclidienne de 2010 par 17 est égal à ………… ».

VI. (2 points) Sophie a 1105 perles noires et 935 perles blanches. Elle réalise des bracelets identiques en utilisant toutes ses perles.
Combien peut-elle réaliser de bracelets au maximum ?
Dans ce cas, si une perle noire coûte 0,25 € et une perle blanche 0,5 €, à combien lui revient un bracelet ?

VII. (1 point) Le but de l'exercice est de rechercher un entier dans liste ci-dessous.
On sait que c'est un multiple de 9, c'est aussi un multiple de 5. Ce n'est pas un multiple de 2 et il est inférieur à 10 000. Quel est ce nombre mystérieux ? Donner la réponse sans justifier.

9 995   3 779   9 270   559   63 728   10 005

8 928   10 665   7 245   975   555 555 555   95

VIII. (5 points)

1°) Donner sans détailler les calculs l'écriture en base 10 des nombres $\overline{100}^{(8)}$; $\overline{76B}^{(12)}$; $\overline{11010}^{(2)}$.
2°) Donner <u>**sans calcul**</u> l'écriture de 4^3 dans le système de numération en base 4.
3°) Donner l'écriture en base 6 du nombre qui s'écrit 1033 en base 10. Détailler la démarche sur la copie.

IX. (2 points) Les opérations élémentaires sont faciles à exécuter en base deux, mais les écritures sont longues. Par exemple, pour écrire soixante-quatre en binaire, il faut sept chiffres. Pour pallier cet inconvénient, on a cherché d'autres façons d'écrire les nombres.
L'une d'entre elles s'appelle le code **CLE** (Code à Large Échelle).

Définition sur deux exemples :

Le nombre 67 en base 10 s'écrit $\overline{1000011}$ en base 2.
En effet on a la décomposition suivante : $67 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$.
En ne conservant que les termes non nuls : $67 = 2^6 + 2^1 + 2^0$.
67 s'écrit alors en code CLE sous la forme (6 ; 1 ; 0).

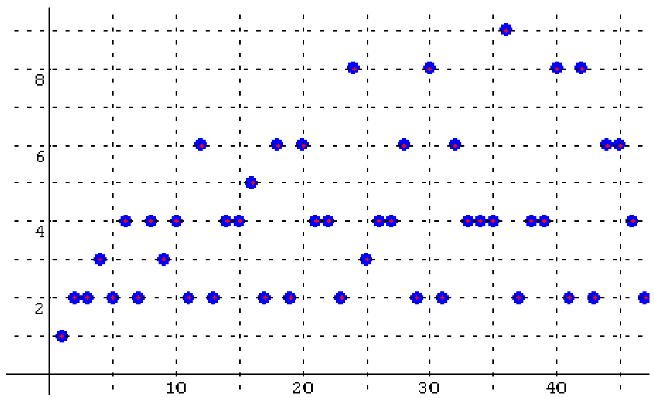
Le nombre 8 en base 10 s'écrit $\overline{1000}$ en base 2.
En effet on a la décomposition suivante : $8 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$.
En ne conservant que les termes non nuls : $8 = 2^3$.
8 s'écrit alors en code CLE sous la forme (3).
Cette définition s'étend à tous les entiers naturels non nuls.

1°) **Transformations d'écritures**
a) Écrire en base 10 le nombre (7 ; 5 ; 3 ; 1).
b) Écrire en code CLE les nombres en base 10 suivants : 15 et 128.

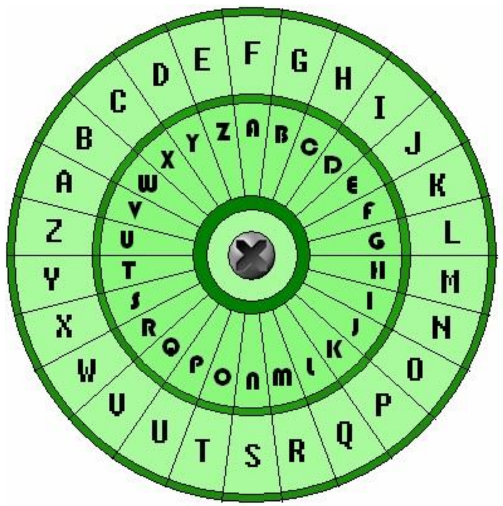
2°) **Premières propriétés**
a) À quoi reconnaît-on qu'un nombre écrit en code CLE est impair ?
b) À quoi reconnaît-on qu'un nombre écrit en code CLE est une puissance de 2 ?

X. (4 points) Dans le graphique ci-dessous, on a représenté les points dont l'abscisse est un entier naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant 47$ et dont l'ordonnée est le nombre de diviseurs entiers naturels de l'entier n.

1°) A l'aide du graphique, donner le nombre de diviseurs de 10.
Expliciter la liste de tous les diviseurs entiers naturels de 10.
2°) Donner sans justification la liste des tous les entiers premiers inférieurs ou égaux à 47. Comment reconnaît-on les points dont l'abscisse est un entier premier ?
3°) Sur le graphique, il n'existe qu'un point dont l'ordonnée est 5. Quelle est l'abscisse de ce point ?
4°) Quels sont les entiers naturels compris entre 1 et 47 qui possèdent 3 diviseurs ?



Bonus



Cet appareil servait à César pour coder les messages qu'il expédiait à ses armées. On fait tourner le disque central et on utilise les correspondances pour coder le message. Ainsi sur l'image on a choisi une clef de 5, donc le A devient F, B devient G…
On donne ci-dessous le tableau de fréquences (en pourcentages, valeurs arrondies au centième) d'apparition des lettres dans un texte écrit en français.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
9,42	1,02	2,64	3,39	15,87	0,95	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,34	3,24
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
7,15	5,14	2,86	1,06	6,46	7,90	6,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Traduire le texte suivant (479 caractères) :

FMSTSHJXYZSUJZHTZWYOJZSJMTRRJTSUTZAFNYINWJTMINJZGNJSIJXHMTXJXJSXTRRJJSAFWNF
SYQJYTSUFWJCJRUQJYJSJEFLWJXXNKRTNRTSXNJZWXNOFAFNXZSYJQSJENQKFZIWFNYXZWQJ
HMFRUVZJOJRJQFRUZYFXXJFRNHFQRFNXNQITNYYWJRUJWIFSXATYWJYFXXJUTZWGTNWJKFN
YJXATZXKFGWNVZJWZSMFSFUIJXHWNUYNKHJXYZSWTHZSUNHHJXYZSHFUVZJINXOJHJXYZSJ
UJSNSXZQJHZWNJZCIJVZTNXJWYHJYYJTGQTSLZJHFUXZQJIJHWNYTNWJRTSXNJZWTZIJGTNYJF
HNXJFZCLWFHNJZCFNRJEATZXFHJUTNSYQJXTNXJFZCVZJUFYJWSJQQJRJSYATZXATZXUWJTHH
ZUFYJXIJYJSIWJHJUJWHMTNWFQJZWXUJYNYJXUFYYJX

Si possible, trouver le titre, l'auteur…

Corrigé du contrôle du 7 mai 2010

I.

2°) $\dfrac{25}{97+x}=\dfrac{25}{100}$

$97+x=100$

$x=3$

Il faut ajouter trois boules noires.

3°) **Dans cette question**

On ajoute 100 boules rouges à chacun.

A : $\dfrac{125}{197}=0{,}634$ B : $\dfrac{110}{140}=0{,}78...$ C : $\dfrac{140}{257}=0{,}54...$

Bernard est celui qui a la plus la plus grande probabilité de tirer une boule rouge alors qu'au départ c'était lui qui avait la plus petite probabilité.

II.

1$^{\text{ère}}$ loi : loi d'équiprobabilité

Résultat	Rouge	Vert	Jaune	
Probabilité	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	Total = 1

2$^{\text{e}}$ loi :

Résultat	Rouge	Vert	Jaune	
Probabilité	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4}{7}$	Total = 1

3$^{\text{e}}$ loi :

Résultat	Rouge	Vert	Jaune	
Probabilité	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$	Total = 1

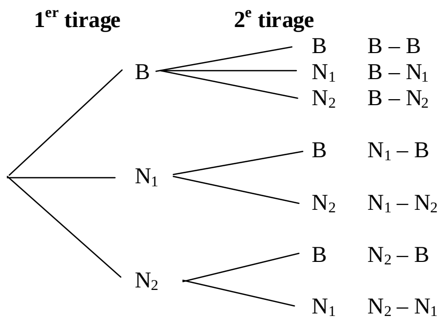
Les résultats pour 100 expériences, 2000 expériences, 5 000 expériences, 10 000 expériences permettent de rejeter la première loi (loi d'équiprobabilité) : en effet, pour aucune de ces expériences, les fréquences sont égales.

De même, on peut rejeter la 3$^{\text{e}}$ loi, qui ne colle pas bien avec les résultats pour 10 000 expériences.

On retient plutôt la 3$^{\text{e}}$ loi de probabilité, qui colle le mieux avec les résultats pour 10 000 expériences réalisées, d'après la loi des grands nombres).

III.

1°) **Arbre de possibilités**



On pourra remarquer que cet arbre n'est pas régulier.

2°) Il y a 7 résultats possibles.
Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

E : « obtenir deux boules de couleurs différentes ».

$P(\mathrm{E})=\dfrac{4}{7}$

F : « obtenir deux boules la même couleur ».

$P(\mathrm{F})=\dfrac{3}{7}$

IV. $f(x)=-x^2+2x+2$

1°) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme du second degré.

Pour tout réel *x*, on a : $f'(x)=-2x+2$.

2°)

On cherche la valeur de *x* qui annule la dérivée.

$-2x+2=0$
$-2x=-2$
$x=1$

La dérivée de *f* s'annule pour $x=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de *f*		$\nearrow$	3	$\searrow$	

Calcul du maximum global :

$f(1)=-1^2+2\times1+2=-1+2+2=3$

3°) a) Démontrons que pour tout réel *x*, on a : $f(x)=3-(x-1)^2$.

$$\begin{aligned}3-(x-1)^2&=3-(x^2-2x+1)\\&=3-x^2+2x-1\\&=-x^2+2x+2\\&=f(x)\end{aligned}$$

b) Résolvons par le calcul l'inéquation $f(x)>0$.

L'inéquation est successivement équivalente à :

$3-(x-1)^2>0$
$(\sqrt{3})^2-(x-1)^2>0$
$(\sqrt{3}-x+1)(\sqrt{3}+x-1)>0$

$\sqrt{3}-x+1=0$	$\sqrt{3}+x-1=0$
$x=1+\sqrt{3}$	$x=1-\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
SGN de $\sqrt{3}+x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $\sqrt{3}-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
SGN de $(\sqrt{3}-x+1)(\sqrt{3}+x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S=\left]1-\sqrt{3}\,;1+\sqrt{3}\right[$.

4°) La tangente D à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 3 a pour équation : $y=f'(3)(x-3)+f(3)$.

Or : $f(3)=-9+6+2=-1$ et $f'(3)=-2\times3+2=-6+2=-4$.

Donc D a pour équation : $y=-4(x-3)-1$ soit $y=-4x+11$.

V.

$$\begin{array}{r|l} 2010 & 17 \\ \cline{2-2} 31 & 118 \\ 140 & \\ 4 & \end{array}$$

« Le reste de la division euclidienne de 2010 par 17 est égal à 4.
« Le quotient de la division euclidienne de 2010 par 17 est égal à 118.

VI.

Comme toutes les perles doivent être utilisées, le nombre de bracelet N doit diviser le nombre de perles noires et doit aussi diviser le nombre de perles blanches ; de plus ce nombre N doit être maximal. Par conséquent, N est le PGCD de 1105 et de 935.
On utilise l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de 1105 et 935.

Nombre *a*	**Nombre *b***	**Reste de la division euclidienne de *a* par *b***
1105	935	170
935	170	85
170	85	0

Le PGCD de 1105 et de 935 est le dernier reste non nul dans la suite de divisions euclidiennes donc :
PGCD(1105 ; 935) = 85

On en déduit que N = 85.

Sophie peut réaliser 85 bracelets au maximum en utilisant toutes les perles.

1105 ÷ 85 = 13 et 935 ÷ 85 = 11 Chaque bracelet est composé de 13 perles noires et de 11 perles blanches et son coût de revient est : 13 × 0,25 € + 11× 0,50 € = 3,25 € + 5,50 € = 8,75 €

Un bracelet va donc coûter 8,75 €.

VII. Le nombre mystérieux est 7 245.

En effet, ce nombre est bien inférieur à 10 000.
C’est bien un multiple de 9 (car la somme de ses chiffres en base 10 est divisible par 9) et un multiple de 5 (car le chiffre des unités est égal à 5).
Ce n’est pas un multiple de 2 (car c’est un nombre impair).

VIII.

1°) $\overline{100}^{(8)} = 0\times 8^0 + 0\times 8^1 + 1\times 8^2 = 64$

$\overline{76B}^{(12)} = 11\times 12^0 + 6\times 12^1 + 7\times 12^2 = 11+72+1008 = 1091$

$\overline{11010}^{(2)} = 0\times 2^0 + 1\times 2^1 + 0\times 2^2 + 1\times 2^3 + 1\times 2^4 = 2+8+16 = 26$

2°) $4^3 = \overline{1000}^{(4)}$

3°) On applique la méthode vue en cours.

$$\begin{array}{r|l} 1033 & 6 \\ \hline 1 & 172 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 172 & 6 \\ \hline 4 & 28 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 28 & 6 \\ \hline 4 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 6 \\ \hline 4 & 0 \end{array}$$

Ainsi : $1033 = \overline{4441}^{(6)}$.

X.

1°) 10 a 4 diviseurs (entiers naturels) : 1, 2, 5, 10.
2°) Les entiers premiers inférieurs ou égaux à 47 sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47.
3°) L’abscisse du point dont l’ordonnée est 5 est 16.
4°) Les entiers naturels qui possèdent 3 diviseurs sont 4, 9 et 25.

Bonus : traduction

Ah ! non ! c'est un peu court, jeune homme !
On pouvait dire... Oh ! Dieu !... bien des choses en somme...
En variant le ton, -par exemple, tenez
Agressif : "Moi, monsieur, si j'avais un tel nez,
Il faudrait sur-le-champs que je me l'amputasse !"
Amical : "Mais il doit tremper dans votre tasse
Pour boire, faites-vous fabriquer un hanap !"
Descriptif : "C'est un roc !... c'est un pic !... c'est un cap !
Que dis-je, c'est un cap ?... C'est une péninsule !"

Ce texte et un extrait de *Cyrano de Bergerac* d’Edmond Rostand.