1ère L Option

Contrôle du vendredi 21 janvier 2011 (2 heures)

Présenter correctement l'en-tête de la copie en aménageant un cartouche de présentation avec le numéro de exercices permettant le report des points.
Ecrire très lisiblement et sans rature au stylo à plume.
Les barres de fractions doivent être tracées horizontalement.

I. (10 points) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$.

1°) Calculer $f'(x)$. Donner le résultat sans expliquer ni détailler les calculs.

Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f* selon le modèle ci-dessous.

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	
Variations de *f*	

Faire ce tableau ainsi que les flèches de variation à la règle.

On commencera par chercher la valeur charnière c'est-à-dire la valeur qui annule la dérivée au brouillon.
Calculer l'extremum au brouillon et compléter le tableau de variation en plaçant cette valeur au bout des flèches.
Tracer les flèches de variations à la règle.

Faire des phrases décrivant les variations de *f* selon le modèle suivant :
« La fonction *f* est …… sur l'intervalle …….. ». Prendre des intervalles fermés.

2°) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$									

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

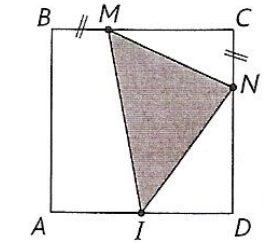
Sur un graphique, tracer le repère (O, I, J) en prenant un « gros » carreau pour unité graphique. Placer les points du tableau précédent. Mettre des pointillés et les valeurs sur les axes pour le point correspondant à l'extremum.
Tracer la tangente horizontale en ce point en utilisant la représentation conventionnelle sous la forme d'une double flèche.
Tracer $\mathcal{C}$ en reliant les points précédents « à la main » en tenant compte du tableau de variations.
On soignera particulièrement l'allure de la courbe au voisinage de la tangente horizontale.
Contrôler sur la calculatrice graphique.

3°) Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 et de la tangente *T'* à $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 2. Tracer ces deux tangentes sur le graphique précédent.
Attention à bien rédiger pour donner les équations des tangentes demandées.

II. (6 points) Soit *f* la fonction définie sur par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Calculer $f'(x)$. Donner le résultat sous forme factorisée en facteurs du premier degré.
Chercher les valeurs charnières c'est-à-dire les valeurs d'annulation de chaque facteur.
Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction *f*.
Faire le tableau de variations ainsi que toutes les flèches à la règle.
Ne pas oublier de mettre les 0 sur la ligne du signe de la dérivée.
Calculer au brouillon les valeurs des extremums locaux et compléter le tableau de variation avec ces valeurs (correctement placées au bout des flèches). Ne pas détailler le calcul des extremums locaux sur la copie.

III. (8 points) On considère un carré ABCD de côté 6 cm. On note I le milieu de [AD].
Soit M et N deux points appartenant respectivement au côté [BC] et au côté [CD] tels que BM = CN.



On s'intéresse à l'aire du triangle IMN. On cherche pour quelle valeur de *x* cette aire est minimale.

On pose *x* = BM. On a donc $0 \leqslant x \leqslant 6$.

1°) Démontrer que l'aire du triangle IMN est donnée par $S(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 9x + 36)$.

On pourra s'aider des formules rappelées ci-dessous.
2°) Calculer $S'(x)$.

3°) Chercher la valeur d'annulation de $S'(x)$.

Dresser un tableau récapitulatif donnant le signe de $S'(x)$ et les variations de *S* (sur l'intervalle [0 ; 6] uniquement).
Faire ce tableau ainsi que les flèches de variations à la règle.
Sur la ligne du signe de $S'(x)$, ne pas oublier de mettre le 0.
Calculer les images de 0 et de 6 par *S* ainsi que la valeur du minimum global.
Compléter le tableau de variation avec ces valeurs (correctement placées au bout des flèches).

En déduire pour quelle valeur de *x* l'aire du triangle IMN est minimale.
On fera une phrase selon le modèle suivant :
« D'après le tableau de variation de *S*, l'aire du triangle IMN est minimale pour *x* = …. ».

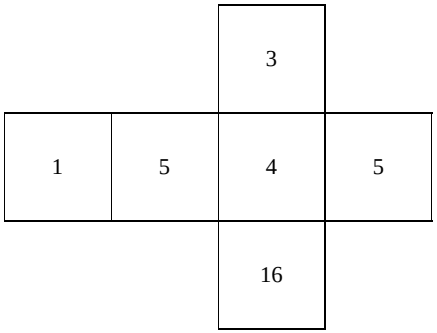
Formulaire :

L'aire d'un carré de côté *a* est égale à a^2.

L'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur *a* et *b* est égale à $\frac{ab}{2}$.

L'aire d'un trapèze dont la petite base a pour longueur *b*, la grande base a pour longueur *B* et la hauteur pour longueur *h* est égale à : $\frac{(b+B)\times h}{2}$.

IV. (5 points) On considère un dé cubique parfait dont toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître à chaque lancer.
Les faces de ce dé portent les nombres indiqués sur le patron ci-dessous :
On lance le dé et on note le nombre apparaissant sur la face supérieure du dé.



On lance le dé et on note le nombre apparaissant sur la face supérieure du dé.

1°) Quelle est la probabilité de voir apparaître le nombre 3 ?
2°) Quelle est la probabilité de voir apparaître un nombre pair ?
3°) Quelle est la probabilité de voir apparaître un nombre qui soit le carré d'un entier ?
4°) La face cachée du dé, qui repose sur le sol, à l'issue d'un lancer, porte le nombre 5.
Quelle est la probabilité de voir aussi apparaître un 5 sur la face supérieure ?
5°) La face cachée du dé, qui repose sur le sol, à l'issue d'un lancer, porte le nombre 1.
Quelle est la probabilité de voir aussi apparaître le 3 sur la face supérieure ?

Donner les cinq résultats des questions précédentes dans un tableau horizontal sans expliquer.

V. (5 points) Une urne contient trois boules : une boule bleue, une boule rouge et une boule jaune.
On tire une boule au hasard. On ne la remet pas dans l'urne.
On tire une deuxième boule au hasard dans l'urne. On la remet dans l'urne.
On tire une troisième boule dans l'urne.
On note les boules dans l'ordre d'apparition.

1°) Faire un arbre de possibilités au brouillon puis recopier et compléter la phrase ci-dessous.

« Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égale à …… »

2°) On note P la loi d'équiprobabilité sur l'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire.
On note E l'événement « La première boule est bleue » et F l'événement « Le tirage contient deux boules de la même couleur ».
Recopier et compléter sans détailler les calculs le tableau ci-dessous (un seul résultat à chaque fois sous forme d'une fraction irréductible) :

$P(\text{E}) =$ ……	$P(\text{F}) =$ ……	$P(\text{E} \cap \text{F}) =$ ……	$P(\text{E} \cup \text{F}) =$ ……

VI. (2 points) Soit A un événement d'un espace probabilisé (Ω, P).
On pose $P(\text{A}) = x$.

Déterminer la valeur de x telle que $P(\overline{\text{A}}) = 3P(\text{A})$.

VII. (2 points) On propose deux programmes de calcul :

Programme A	**Programme B**
- Choisir un nombre - Calculer le carré de ce nombre - Ajouter 4	- Choisir un nombre - Multiplier le nombre par 6 - Retrancher 5

Peut-on partir d'un même nombre et obtenir, avec les deux programmes A et B, un résultat identique ? Justifier la réponse.

VIII. (2 points) On considère une fonction f définie sur l'intervalle [– 4 ; 4] dont les variations sont données dans le tableau ci-dessous :

x	– 4		–3		0		4
Variations de f	5	↘	–1	↗	0	↘	– 2

Dire sans justifier si les implications suivantes sont vraies ou fausses.
Ces implications portent sur un réel x quelconque dans l'intervalle [– 4 ; 4].

1ère implication : $x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$.

2e implication : $x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$.

Corrigé du contrôle du 21 janvier 2011

I. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$.

1°) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme du second degré.

$f'(x) = -x + 1$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, il faut trouver la valeur charnière telle que $-x+1=0$.
On trouve donc $x = 1$.

2°)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de f		↗	5,5	↘	

Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à 5,5 ; il est atteint pour $x = 1$.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

3°) Graphique

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	–5	–2,25	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0	–2,25	–5

4°)

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

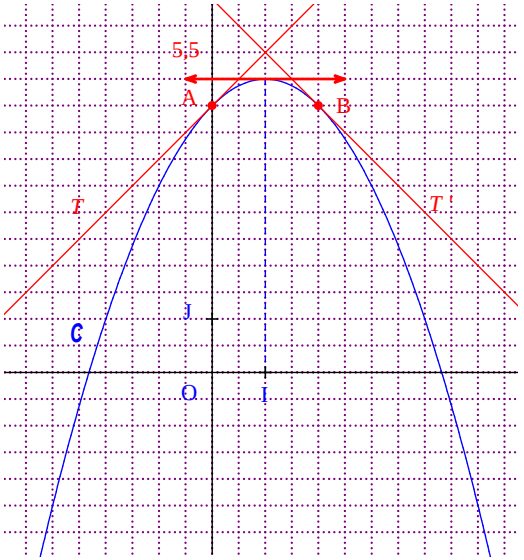
Or : $f(0) = 5$ et $f'(0) = 5$.

Donc T a pour équation : $y = 1 \times x + 5$ soit $y = x + 5$.

La tangente T' à $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 2 a pour équation : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

Or : $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$.

Donc T' a pour équation : $y = -(x-2) + 5$ soit $y = -x + 7$.



On trace précisément les tangentes T et T' grâce aux équations réduites trouvées précédemment (ce qui évite de les tracer approximativement ou « au pif »).

IV. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Déterminons les valeurs charnières telles que $3x = 0$ et $x - 2 = 0$.
On trouve respectivement $x = 0$ et $x = 2$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		–	0	+		+	
Signe de $x-2$		–		–	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	2	↘	–2	↗	

Calcul des extremums locaux de f :

$f(0) = \ldots = 2$
$f(2) = -2$

On complète le tableau de variations avec ces valeurs.

La fonction f est croissante sur les intervalles $]-\infty ; 0]$ et $[2 ; +\infty[$.
La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

III.

De plus, on sait que l'aire de IMN est égale à l'aire du carré ABCD à laquelle on soustrait les aires des triangles rectangles MCN et DNI et du trapèze BMIA.
Ainsi, on peut dire que l'aire A du triangle IMN est égale à :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{MCN} + \mathcal{A}_{NDI} - \mathcal{A}_{BMIA})$$
$$= AB^2 - \left(\frac{BM \times ND}{2} + \frac{ID \times ND}{2} + \frac{(AI + MB) \times AB}{2} \right)$$

On remplace par les valeurs que l'on connaît :

$$\mathcal{A} = 6^2 - \left[\frac{x \times (6-x)}{2} + \frac{3(6-x)}{2} + \frac{6(3+x)}{2} \right]$$
$$= 36 - \frac{9x - x^2 + 18 - 3x + 18 + 6x}{2}$$
$$= 36 - \frac{9x - x^2 + 36}{2}$$
$$= \frac{72 - 9x + x^2 - 36}{2}$$
$$= \frac{36 - 9x + x^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(36 - 9x + x^2)$$

2°) $S'(x) = \frac{1}{2}(-9 + 2x) = -\frac{9}{2} + x = x - \frac{9}{2}$

3°) $S'(x)$ s'annule pour $x - \frac{9}{2} = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{9}{2}$ soit $x = 4{,}5$.

x	0		$\frac{9}{2}$		6
Signe de $S'(x)$		–	0	+	
Variations de S	18	↘	7,875	↗	9

$S(0) = 18$
$S\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{63}{8} = 7{,}875$
$S(6) = 9$

D'après le tableau de variations de S, l'aire du triangle IMN est minimale pour x = 4,5 cm.

IV.

1°) Quelle est la probabilité de voir apparaître le nombre 3 ?

Puisque toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître à chaque lancer, et qu'il n'y a qu'une seule face sur laquelle est inscrit le numéro 3, la probabilité de voir apparaître le nombre 3 est donc égale à $\frac{1}{6}$.

2°) Quelle est la probabilité de voir apparaître un nombre pair ?

Puisque toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître à chaque lancer, et qu'il y a deux faces sur lesquelles sont inscrits des nombres pairs (le 4 et le 16), la probabilité de voir un nombre pair est donc égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3°) Quelle est la probabilité de voir apparaître un nombre qui soit le carré d'un entier ?

Puisque toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître à chaque lancer, et qu'il y a trois faces sur lesquelles sont inscrits des carrés d'entiers (le 1, le 4 et le 16), la probabilité de voir apparaître un nombre qui soit le carré d'un entier est donc égale à $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

4°) La face cachée du dé, qui repose sur le sol, à l'issue d'un lancer, porte le nombre 5.
Quelle est la probabilité de voir aussi apparaître un 5 sur la face supérieure ?

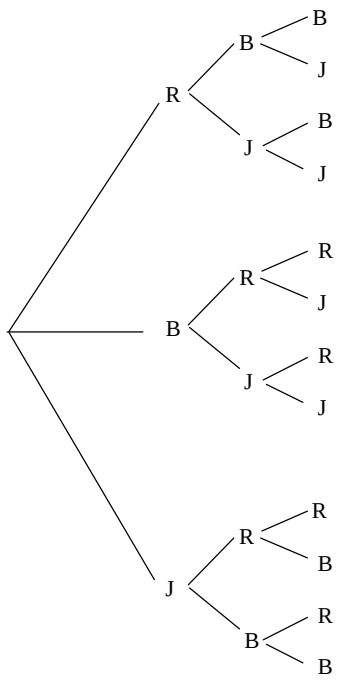
Si la face cachée du dé, qui repose sur le sol, à l'issue d'un lancer, porte le nombre 5, alors d'après le patron du dé, la face supérieure du dé fait apparaître automatiquement le chiffre 5. La probabilité de voir aussi apparaître un 5 sur la face supérieure est donc égale à 1 (c'est un événement « certain »).

5°) La face cachée du dé, qui repose sur le sol, à l'issue d'un lancer, porte le nombre 1.
Quelle est la probabilité de voir aussi apparaître le 3 sur la face supérieure ?

Si la face cachée du dé, qui repose sur le sol, à l'issue d'un lancer, porte le nombre 4, alors d'après le patron du dé, la face supérieure du dé fait apparaître automatiquement le chiffre 4. La probabilité de voir apparaître un 3 sur la face supérieure est donc égale à 0 (c'est un événement « impossible »).

V.

1°) On note B la boule bleue, R la boule rouge et J la boule jaune.



Il y a $3 \times 2 \times 2 = 12$ résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

2°) On applique la formule de Laplace pour les trois premiers calculs de probabilité.

$P(\mathrm{E}) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ (il y a 4 résultats possibles pour E)

$P(\mathrm{F}) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ (il y a 6 résultats possibles pour F)

$P(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$ (il y a 2 résultats possibles pour G)

$P(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$ (formule du cours)

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}$

$= \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{6}$

$= \dfrac{2}{3}$

VI. Déterminons x tel que $P(\overline{\mathrm{A}}) = 3P(\mathrm{A})$ (1).

On a : $P(\mathrm{A}) = x$ donc $P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - x$ (formule qui donne la probabilité d'un événement contraire).

(1) $\Leftrightarrow 1 - x = 3x$

$\Leftrightarrow 4x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

Ainsi, $P(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{4}$ et $P(\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{3}{4}$.

VII.

Soit x le nombre choisi.

Le programme A donne le nombre de sortie : $x^2 + 4$.
Le programme B donne le nombre de sortie : $6x - 5$.

On traduit le problème par une équation $x^2 + 4 = 6x - 5$ (1).

(1) $\Leftrightarrow x^2 + 9 = 6x$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

On en conclut que si on part de 3, on aura le même résultat pour les deux programmes de calcul.

Vérification :

- programme A : $3^2 + 4 = 13$
- programme B : $3 \times 6 - 5 = 13$

Les deux résultats sont bien égaux.

VIII.

La 1re implication est vraie.
La 2e implication est fausse.

Barème

I.

1°) 1 point pour le calcul de la dérivée
1 point pour le signe de la dérivée
1 point pour les variations de la fonction *f*
1 point pour le calcul de l'extremum

2°) 2 points pour le tracé de la courbe

3°) 1 point pour l'équation de chaque tangente
1 point pour le tracé de chaque tangente

II.

1 point pour le calcul de la dérivée
1 point pour la factorisation de l'expression
1 point pour le signe de la dérivée
1 point pour les variations de la fonction *f*
2 points pour le calcul des extremums (1 point pour chaque)

III. 1°) 2 points
2°) 2 points pour le calcul de la dérivée
3°) 1 point pour le signe de la dérivée
1 point pour les variations
1 point pour le calcul du minimum global
1 point pour la conclusion

IV. 1 point par réponse

V. 1 point par réponse

VI. 2 points (1 point si le problème a été bien posé)

VII. 2 points

VIII. 1 point par réponse