# Le paradoxe des anniversaires

## 1. On considère quatre personnes.

On cherche la probabilité pour qu'au moins deux des quatre personnes soient nées le même jour (nous parlons d'une année non bissextile).

A : « Au moins deux personnes sont nées le même jour »

$\bar{A}$ : « Toutes les personnes ne sont pas nées le même jour »

D'après la formule de Laplace,

$$P(\text{A}) = 1 - P(\overline{\text{A}}) = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times 362}{365^4} = 0{,}01635\ldots$$

Explication pour le dénominateur : il y a 365 possibilités pour le jour de naissance de la 1ère personne, 365 possibilités pour le jour de naissance de la 2e personne, et de même pour les deux autres personnes ; on multiplie les nombres de possibilités.

## 2. On considère trente personnes.

On cherche la probabilité pour qu'au moins deux des trente personnes soient nées le même jour.

$$P(\text{A}) = 1 - P(\overline{\text{A}}) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times 336}{365^{30}}$$

Pour effectuer le calcul, on utilise la calculatrice.

Le produit $365 \times 364 \times \ldots \times 336$, produit de 30 facteurs décroissants à partir de 365, correspond au nombre d'arrangements de 30 éléments pris parmi 365 et se note $\text{A}_{365}^{30}$.

On effectue le calcul ainsi sur calculatrice TI :

365 $\boxed{\text{math}}$ PRB 2 : Arrangement 30

On obtient $P(\text{A}) = 0{,}706316243\ldots$

On constate que cette probabilité est assez élevée, ce qui est assez surprenant.

# 3. Généralisation

On considère $n$ personnes.

On cherche la probabilité $p(n)$ pour qu'au moins deux personnes soient nées le même jour.

On a la même formule qu'auparavant.
On rédige un algorithme identique au précédent.

**Résultats pour les valeurs de *n***

| $n$ | $p(n)$ |
|---|---|
| 5 | 2,71 % |
| 10 | 11,69 % |
| 15 | 25,29 % |
| 20 | 41,14 % |
| 25 | 56,87 % |
| 30 | 70,63 % |
| 40 | 89,12 % |
| 50 | 97,04 % |
| 60 | 99,41 % |
| 80 | 99,99 % |
| 100 | 99,99997 % |
| 200 | 99,9999999999999999999999999998 % |
| 300 | $\left(1-\left(7\times10^{-73}\right)\right)\times$ 100 % |
| 350 | $\left(1-\left(3\times10^{-131}\right)\right)\times$ 100 % |
| > 365 | 100 % (par le principe des tiroirs) * |

* Le **principe des tiroirs** ou **principe de Dirichlet** s'énonce ainsi :

« Si on dispose plus de $k+1$ objets parmi $k$ tiroirs, alors un tiroir contient au moins deux objets. »

« Si on doit ranger des chaussettes dans des tiroirs et que le nombre de chaussettes est supérieur au nombre de tiroirs, alors un tiroir contient au moins deux chaussettes ».

Il est évident que pour $n>365$, au moins deux personnes sont nées le même jour.
Donc $n>365$, $p(n)=100$ %.

Il est intéressant de constater que, lorsque $n$ augmente, $p(n)$ augmente aussi (ce qui est logique !).
On peut d'ailleurs démontrer ce résultat de manière très simple.

# 4. Conclusion

**Citation extraite de l’article de Wikipedia sur le paradoxe des anniversaires :**

« Le paradoxe des anniversaires, dû à Richard von Mises, est à l’origine une estimation probabiliste du nombre de personnes que l’on doit réunir pour avoir une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l’année. Il se trouve que ce nombre est 23, ce qui choque un peu l’intuition. À partir d’un groupe de 57 personnes, la probabilité est supérieure à 99 %.

Cependant, il ne s’agit pas d'un paradoxe dans le sens de contradiction logique ; c’est un paradoxe, dans le sens où c’est une vérité mathématique qui contredit l’intuition : la plupart des gens estiment que cette probabilité est très inférieure à 50 %. »

# Appendice

### Aspect pratique du calcul de $p_n$

La méthode indiquée sur la calculatrice marche pour $n \leqslant 39$.
Elle ne marche plus à partir de $n = 40$.

Pour effectuer le calcul, on doit ruser. Nous allons montrer le principe avec $n = 30$.

On a établi que $P(\mathrm{A}) = 1 - \dfrac{365 \times 364 \times ... \times 336}{365^{30}}$. On peut donc écrire $P(\mathrm{A}) = 1 - \dfrac{365}{365} \times \dfrac{364}{365} \times ... \times \dfrac{336}{365}$.

On va rédiger un algorithme qui permet de calculer cette probabilité (retenir le principe de calcul d'un produit qui « grossit » de plus en plus).

**Variables :**
*i*, *p*, *q* : entiers naturels

**Initialisation :**
*q* prend la valeur 1

**Traitement :**
**Pour** *i* allant de 0 à 29 **Faire**
    *q* prend la valeur $q \times \dfrac{365 - i}{365}$
**FinPour**
*p* prend la valeur $1 - q$

**Sortie :**
Afficher *p*

En programmant cet algorithme sur calculatrice, on obtient $P(\mathrm{A}) = 0{,}706316243\ldots$.
On voit que cette probabilité est assez élevée, ce qui est assez surprenant.

Le nombre d'arrangements de *p* éléments pris parmi *n* (*n* et *p* étant deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$) est donné par $\mathrm{A}_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$.