1ère L Option

Calculs de dérivées (2)
Dérivée d'un produit et d'un quotient

I. Dérivée d'un produit

1°) Propriété (admise sans démonstration)

u et *v* sont deux fonctions dérivables.
La dérivée de la fonction $u \times v$ est donnée par la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

2°) Formulation en français :

Pour faire le dérivé de *uv*, on fait la dérivée de *u* fois le dérivé de *v* + *u* fois la dérivé de *v*.

Dans la formule *uv'* + *uv'*, c'est *u'* fois *v* en entier + *u* fois *v'* en entier.

3°) Mise en garde

Attention, la formule est plus compliquée ; la dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées.

« C'est comme les identités remarquables »

3°) Exemple :

$f : x \mapsto (2x-1)\times(3x+1)$

Calculer la dérivée de *f*.

Méthode :

On décompose.

On pose

$u(x) = 2x-1$
$v(x) = 3x+1$

On dérive *u* et *v* en utilisant le tableau des dérivées.
$u'(x) = 2$
$v'(x) = 3$

On écrit $f = u \times v$.
On pose la formule $f' = u'v + uv'$.
On remplace avec les expressions précédentes.

$f'(x) = 2(3x+1) + (2x-1)\times 3$
$f'(x) = 6x+1+6x-3$ (on développe)
$f'(x) = 12x-2$

II. Dérivée de l'inverse d'une fonction

1°) Propriété (admise sans démonstration)

u est une fonction.
La dérivée de la fonction $\frac{1}{u}$ est donnée par la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Exemple

$f(x) = \frac{1}{3x-1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ (le dénominateur ne doit pas s'annuler)

On pose $u(x) = 3x-1$.

$u'(x) = 3$

$f = \frac{1}{u}$
$f' = -\frac{u'}{u^2}$

$f'(x) = -\frac{3}{(3x-1)^2}$

III. Dérivée d'un quotient

1°) Propriété (admise sans démonstration)

u et v sont deux fonctions dérivables.
La dérivée de est donnée par la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Commentaires

Le – du haut ; l'ordre des facteurs.

2°) Exemple

$\boxed{f(x) = \frac{2x-1}{x+4}}$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ (le dénominateur ne doit pas s'annuler)

Version au propre	Brouillon
f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ $f'(x) = \frac{2(x+4)-(2x-1)\times 1}{(x+4)^2}$ Utiliser des parenthèses (« parenthèses de sécurité ») $\boxed{f'(x) = \frac{9}{(x+4)^2}}$ On ne développe pas le dénominateur.	On pose $u(x) = 2x-1$ $v(x) = x+4$ $u'(x) = 2$ $v'(x) = 1$ $f = \frac{u}{v}$ $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $f'(x) = \frac{2(x+4)-(2x-1)\times 1}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2}$

IV. Tableau récapitulatif

Dans ce tableau, u et v représentent des fonctions dérivables et k un réel.

Fonction « normale »	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}\ (u \neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}\ (v \neq 0)$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

C'est un autre tableau que l'on ne peut pas déduire du tableau donné dans le chapitre précédent.

On combinera ce tableau avec le tableau des dérivées des fonctions de référence.

Faire attention, qu'il y a des formules avec 1 seul *u*
1 *u* et 1 *v* …

V. Remarque sur les dérivées de produits et les quotients dans des cas particuliers

1°) Dérivée d'un produit

Exemple

$\boxed{f : x \mapsto 5x^2}$

Calculer la dérivée de f.

1ère méthode :

On décompose pour appliquer la formule de dérivée de αu.
On pose $u(x) = x^2$ et $\alpha = 5$.

$f'(x) = 5 \times 2x$
$\boxed{f'(x) = 10x}$

2e méthode :

On décompose pour appliquer la formule de dérivée de *uv*.
On pose $u(x)=5$ et $v(x)=x^2$.

On pose $u'(x)=0$ et $v'(x)=2x$.

$f'(x)=0\times x^2+5\times 2x$
$\boxed{f'(x)=10x}$

2°) Dérivée d'un produit

• **Exemple 1** $\boxed{f : x \mapsto \frac{x^3}{2}}$

1ère méthode : Réécriture $f(x)=\frac{1}{2}x^3$.

On applique la formule de dérivée de *ku*.

2e méthode : On peut aussi appliquer la formule de dérivée d'une fonction de la forme $\frac{u}{v}$ sans faire de réécriture.
On obtient le même résultat mais c'est plus long. Donc méthode déconseillée.

• **Exemple 2** $\boxed{f : x \mapsto \frac{2}{x}}$

1ère méthode : réécriture $f(x)=2\times\frac{1}{x}$

$f'(x)=2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{x^2}$

2e méthode : On peut aussi appliquer la formule de dérivée d'une fonction de la forme $\frac{u}{v}$ sans faire de réécriture.
On obtient le même résultat mais c'est plus long. Donc méthode déconseillée.

Bilan :

Pour dériver un quotient dont le numérateur ou le dénominateur est un nombre, on effectue une réécriture (on n'utilise pas la formule de dérivée d'un quotient).

1ère L Option

Exercices sur les calculs de dérivées (2)
Dérivée d'un produit et d'un quotient

1 Dérivée d'un produit $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$

$f(x)=(2x-1)(x+3)$ (ne pas développer $f(x)$ avant de dériver la fonction mais donner le résultat sous forme développée réduite)
$f(x)=(1-x)(2+3x)$

2 Dérivée de l'inverse d'une fonction ; utilisation de la formule $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}}$

$f(x)=\frac{1}{2x-1}$; $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ (ne pas développer le dénominateur dans le résultat).

3 Dérivée d'un quotient ; utilisation de la formule $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$

$f(x)=\frac{3x-2}{x+3}$; $f(x)=\frac{x^2+2x-6}{x-1}$ (ne pas développer les dénominateurs dans les résultats).

4 On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{3x}{x-1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

Réponse : $y=-3x+12$.

Formulaire récapitulatif

Dérivées des fonctions de référence

$f(x)=$	$f'(x)=$
k (k réel fixé)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Opérations algébriques sur les dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α un réel.

Fonction	**Dérivée**
$u+v$	$u'+v'$
$\alpha \times u$	$\alpha \times u'$
$u \times v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}\ (u \neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}\ (v \neq 0)$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$